Differentiation af sinus
– problematiske beviser for, at sin'(x) = cos(x)

Bjørn Grøn, Rysensteen Gymnasium

Når man på A–niveau skal udforme eksamensspørgsmål inden for emnet *Trigonometriske funktioner*, er det oplagt at overveje sætningen: $\sin'(x) = \cos(x)$ og $\cos'(x) = -\sin(x)$. Men her skal man passe på og vide helt præcist, hvad man går efter. For de beviser, der findes i de seriøse lærebøger, både til gymnasiet og til første år på universiteterne, er stort set alle behæftet med fejl, og fejl som ikke er ligetil at rette. Det vil jeg give eksempler på i det følgende. Og jeg vil foreslå, hvad man kan gøre, hvis man gerne vil have formlerne med ved den mundtlige prøve.

Jeg vil naturligvis ikke gå ind i en specifik kritik af andre lærebøgers behandling, men starte med at illustrere problemet ved at gengive, hvordan det er behandlet i *Hvad er matematik?*

1. Et geometriske bevis for, at sin'(*x*) = cos(*x*)

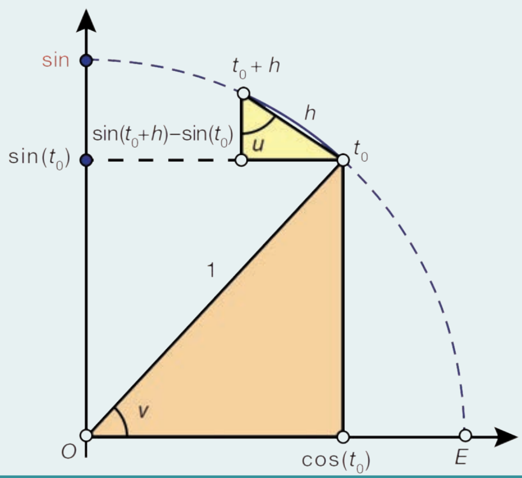
Her argumenterer vi for, at formlen må gælde ved hjælp af følgende illustration:

Vi ønsker at vurdere sekanthældningen for funktionen $\sin(t)$:

$$\frac{\sin(t_0 + h) - \sin(t_0)}{h}$$

Radiantallene t_0 og $t_0 + h$ er afsat på enhedscirklen, og vi har med udgangspunkt i de punkter tegnet to retvinklede trekanter, den store orange, og en lille gul. Hypotenusen i den lille gule følger med tilnærmelse cirkelbuen, og når *h* bliver lille, vil hypotenusen ikke være til at skelne fra tangenten. Men da radius står vinkelret på tangenten, får vi nu, at de to trekanter med tilnærmelse er ensvinklede.

Når $h \to 0$, vil vinklen $u \to$ vinklen v.



Cosinus er kontinuert, så derfor vil $\cos(u) \to \cos(v)$. Udnyt nu kendskabet til cosinus i retvinklede trekanter:

$$\cos(u) = \frac{\text{hosliggende katete til u i gule trekant}}{\text{hypotenusen i gule trekant}}$$

Dvs. se (tegning): $\cos(u) = \dfrac{\sin(t_0 + h) - \sin(t_0)}{h}$

$$\to \cos(v) = \cos(t_0)$$

Heraf aflæses konklusionen: $(\sin(t_0))' = \cos(t_0)$.

En elev, der kan gennemføre det ræsonnement, vil demonstrere stor indsigt i matematisk teori. Og man kan også lidt løst sige, at ræsonnementet fortæller, at sætningen *må gælde*. Det er ofte sådan matematisk forskning starter: Når man har fået opbygget en stærk overbevisning om, at en sætning må være sand, så kommer arbejdet med at bevise den.

2. De fundamentale problemer i et sådant bevis

Men endnu bedre vil det selvfølgelig være, hvis eleven også kan argumentere for, at *beviset indeholder en række problemer*, af definitorisk karakter, som vi ikke let kan reparere, og at det også indeholder direkte en *cirkelslutning*. Vi giver naturligvis også et korrekt bevis, men lad os først kommentere ovenstående:

Første kommentar: Vi anvender, at *cosinus er kontinuert*. Hvorfor er den det? Der er flere typer af argumenter – hvortil dog ikke hører, at "det kan man se af grafen". 1) Geometrisk: Der argumenteres på grundlag af figuren tegnet i næste afsnit, og med brug af de logaritmiske formler. Det gemmer vi lige lidt. 2) Analytisk: Opskriv udtrykket $|\cos(x_0 + h) - \cos(x_0)|$, omskriv ved hjælp af de logaritmiske formler, og vurder faktorerne. Det kan gøres korrekt. 3) Cosinus er kontinuert, fordi den er differentiabel, og det følger af, at sinus er differentiabel – men hov! Det er jo det vi er ved at vise. Så den cirkelslutning dur ikke.

Anden kommentar: Vi afsætter t_0 og h på enhedscirklen. Det er begrundet i, at vi dermed slipper uden om de analytiske omskrivninger med brug af additionsformler og logaritmiske formler, der jo ikke er pensum i vore dage, og i stedet fører det over i et lidt elegant geometrisk argument. Men hvordan flytter vi tal fra 1. aksen op på enhedscirklen? Ved at "snurre 1. aksen rundt om cirklen…"? Man støder her med det samme ind i det helt banale spørgsmål: Hvordan måler man egentlig længden x af en cirkelbue? Da buelængden er den uafhængige variable, er det helt centralt, at vi kan svare på det. Når vi tegner graferne af $\sin(x)$ og $\cos(x)$, så skal stykket x lægges ned på x–aksen. Hvordan gøres det? Intuitivt ser det let ud: Man tager en snor, lægger den langs cirklen, måler af og lægger så snoren stramt hen af 1. aksen. Det er et fint billede, men det kan man vist godt høre ikke er en matematisk definition, vi kan arbejde med.

3. Et klassisk analytisk bevis for sin'(x) = cos(x)

En traditionel metode til at bestemme den afledede funktion er ved at foretage passende omskrivninger af udtrykket for differenskvotienten. De logaritmiske formler giver

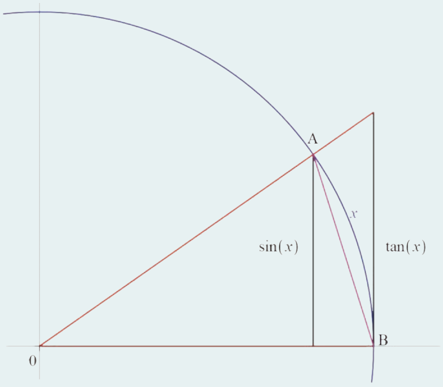
$$\frac{\sin(t_0+h)-\sin(t_0)}{h}=$$
$$\frac{2\cdot\sin\left(\frac{1}{2}h\right)\cdot\cos\left(t_0+\frac{1}{2}h\right)}{h}=\frac{\sin\left(\frac{1}{2}h\right)}{\frac{1}{2}h}\cdot\cos\left(t_0+\frac{1}{2}h\right)$$

Det er den omskrivning, man finder hos Kristensen og Rindung (bind 2, 1963, s. 73) og hos deres læremester Harald Bohr, der sammen med andre skrev *Lærebog i matematisk analyse* (bind 2, 1960, s 129). Bohrs læremester R. Courant anvender i *Differential and Integral Calculus* en lidt anden version, hvor første led splittes op med en additionsformel (engelske udgave, 1937, s. 96). Når jeg også omtaler Courant, er det fordi denne perlekæde af fremragende lærebøger alle ender i de samme argumenter, der klarer udtrykket ovenfor, nemlig at

$$\frac{\sin(x)}{x}\to 1 \text{ når } x\to 0 \text{, og cosinus er kontinuert.}$$

Argumentet bygger alle steder på en tegning som denne, der giver dobbeltuligheden: $\sin(x)<x<\tan(x)$ (*) (se fx K&R, s. 32). Tegningen bruges på to måder: Til at vurdere længder og til at vurdere arealer.

Længder: $\sin(x)<|AB|$ følger af Pythagoras. Hvad er argumentet for, at $|AB|<x$? Måske, at linjen er *den korteste afstand mellem to punkter*? Er det bevist? Eller er det et axiom? Eller vil man bare sige, at det er indlysende? Men hvorfor er $x<\tan(x)$? Det gives der heller ikke argumenter for. Så argumentet for (*) er, *"at det kan man se"*.



Arealer: Der er mere styr på arealer – her kan man ovenikøbet henvise til axiomer og argumentere for, at

Arealet af trekant OAB
< Arealet af cirkeludsnittet OAB
< Arealet af den store trekant med tan(x)

Vi anvender diverse arealformler og får

$$\tfrac{1}{2}\cdot\sin(x)\cdot 1<\frac{x}{2\cdot\pi\cdot 1}\cdot\pi\cdot 1^2<\tfrac{1}{2}\cdot\tan(x)\cdot 1$$

der reduceres til $\sin(x)<x<\tan(x)$.

Men: Hvor ved vi egentlig fra, at cirklens areal er $\pi\cdot r^2$? Det er en formel, der bevises under integralregning med anvendelse af, ja: Formlerne for differentiation af sinus og cosinus! Altså en cirkelslutning.

Hvis (*) gælder, så kan dette let omskrives til

$$0<1-\frac{\sin(x)}{x}<1-\cos(x)$$

Og hvis vi har bevist, at cosinus er kontinuert, så ser vi nu let, at

$$\frac{\sin(x)}{x}\to 1 \text{ når } x\to 0$$

.

Vender vi tilbage til den analytiske omskrivning i starten af afsnittet med brug af de logaritmiske formler, så ser vi, at dette giver konklusionen: *Sinus er differentiabel med afledet funktion cosinus*.

Differentiation af cosinus kan herefter lettest findes med brug af sammensat differentiation på udtrykket

$$\cos(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

Men det grundlæggende problem er naturligvis, at vi laver en cirkelslutning.

Grænseværdien $\frac{\sin(x)}{x}\to 1$ når $x\to 0$ er helt korrekt, men den bevises ud fra kendskab til – ja netop, differentiation af sinus.

4. En analytisk definition af de trigonometriske funktioner

(Det følgende kan elever i 3.g godt gennemføre, for det bygger alene på emner, der er gennemgået.)

Det grundlæggende problem er, at vi ikke har en præcis definition af sinus, fordi vi ikke har en præcis måde at måle en kurvelængde på. Men dette får vi jo i integralregningen:
For en differentiabel funktion $f(x)$ er længden af stykket på grafen for f fra et punkt $(a, f(a))$ til et punkt $(b, f(b))$ lig med

$$\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx \qquad (**)$$

Enhedscirklen er i den positive halvplan graf for funktionen $f(x)=\sqrt{1-x^2}$. Med nogle omskrivninger af integranden ser vi, at (**) her bliver

$$\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Fra geometrien kender vi den omvendte eller inverse funktion til sinus, der anvendes, når vi skal bestemme vinkler. Den omvendte funktion kaldes også *arcusinus*, *arcsin*. Hvis vinklen (i radianer) er θ, så gælder

$$y = \sin(\theta) \Leftrightarrow \arcsin(y) = \theta \qquad (*)$$

Læses denne fra højre mod venstre, har vi her buelængden "frilagt".

Stykket θ er buen mellem $(1,0)$ og $P(x,y)$, og y er nu den uafhængige variabel, så vi får

$$\theta = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \quad \text{dvs.} \quad \arcsin(y) = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

hvor vi har skiftet variabelnavn for ikke at skabe forvirring. Dvs, at den traditionelle indføring af sinus giver denne formel for arcsin.

Da dette er et fuldstændig veldefineret udtryk, kan vi anvende dette til at give en ny definition af arcsin, sin og cos, *der helt matcher det geometriske billede, vi traditionelt arbejder med*:

Definition af arcsin og af sin og cos

1. Funktionen arcsin defineres som

$$\arcsin(y) = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \qquad y \in [0;1[$$

2. Funktionen sin defineres som den omvendte til arcsin

$$\sin(\theta) = y \Leftrightarrow \arcsin(y) = \theta$$

3. Funktionen cos defineres ud fra sin:

$$\cos(x) := \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

At funktionen arcsin faktisk har en omvendt funktion fremgår af, at den afledede er positiv:

$$\left(\arcsin(y)\right)' = \left(\int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

5. Beviset for, at sin'(x) = cos(x)

Arcsin(x) er pr. definition kontinuert og differentiabel. Den omvendte funktion sin(x), hvis graf er en spejling af grafen for arcsin, arver disse egenskaber. Så sin(x) er differentiabel, og vi bestemmer den afledede med samme teknik, som i beviset for, hvordan man differentierer ln(x) og e^x :

$$\arcsin\left(\sin(x)\right) = x$$

Omvendte funktioner ophæver hinanden

$$\left(\arcsin\left(\sin(x)\right)\right)' = (x)'$$

Når funktionerne er ens, er de afledede ens

$$\arcsin'\left(\sin(x)\right)\cdot\left(\sin(x)\right)' = 1$$

Reglen for sammensat differentiation

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sin(x)\right)^2}}\cdot\left(\sin(x)\right)' = 1$$

Anvend viden om arcsin'(x)

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\cos(x)\right)^2}}\cdot\left(\sin(x)\right)' = 1$$

Anvend "Pythagorasformlen" for cos og sin

$$\frac{1}{\cos(x)}\cdot\left(\sin(x)\right)' = 1$$

cos(x) er positiv i området fra $-\pi/2$ til $\pi/2$

$$\left(\sin(x)\right)' = \cos(x)$$

Gange igennem med cos(x)

Formlen $\cos'(x) = -\sin(x)$ findes ved sammensat differentiation af formlen for cos(x).

6. Efterspil: Der er andre tilgange til de trigonometriske funktioner

Da jeg studerede matematik for mange år siden, blev vi på første års kurset om analyse opfordret til – foruden noter og kapitler i Courant og andet – selv at foretage en læsning om de tilsvarende emner i Walter Rudins *Principles of Mathematical Analysis*. Det var på mange måder en øjenåbner til, hvordan matematik også kan behandles. Da jeg så efter i klassikerne, hvordan de behandler sinus, fulgte jeg Sven Bundgårds råd om også altid at konferere Rudin. Og det var igen en øjenåbner.

Rudin bevæger sig hurtigt ud i kompleks funktionsteori og analytiske funktioner, og når dette er på plads og konvergenskriterierne bevist, så introduceres sinus og cosinus som uendelige summer – polynomier af uendelig grad – svarende til deres taylorudvikling (Rudin, s. 163ff):

Sæt $E(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ og definer

$$C(x) := \tfrac{1}{2}\left(E(ix) + E(-ix)\right) \quad \text{og} \quad S(x) := \tfrac{1}{2i}\left(E(ix) - E(-ix)\right)$$

hvor z er et komplekst tal, og x er et reelt tal. $E(z)$ er da den komplekse eksponentialfunktion, og de andre to er de samme funktioner, vi kender som cos(x) og sin(x).

Gør man det, og har man alt på plads, så er det jo meget elegant, og man differentierer og integrerer som en leg. Men her er vi selvfølgelig et helt andet sted, og det er blot nævnt her som en mulig inspiration til nogle lærere.