Begrebsafklaring og struktur som metode

Marianne Bie, Borupgaard Gymnasium & Hans Bolvinkel, Nørre Gymnasium

Indledning

I gymnasiet møder man ikke sjældent formuleringer som: »… så ryger 2*x* over på den anden side«, »… funktionen *f* til *x*«, »ligmedstegnet«, »… det gør man bare, jeg kan ikke forklare hvorfor« og lignende. Det er formuleringer, som udtrykker en sproglig usikkerhed, som, ifølge vores undersøgelser, afspejler og afspejles i en matematisk usikkerhed. Sproget hænger sammen med den måde, vi opfatter verden på, og hvis de matematiske begreber står upræcist defineret for eleverne, så bliver deres arbejde med begreberne tilsvarende upræcist. Som eksempel har vi undersøgt ligningsløsning, hvor alene begrebet ligning for de fleste elever var svært at definere. Eleverne har et billede af, hvad en ligning er, et billede, der er skabt i folkeskolen, men som sjældent harmonerer 100 % med definitionen på en ligning. Dvs. at der opstår en diskrepans mellem elevernes begrebsbillede og begrebsdefinitionen (Tall & Vinner 1981), som får afgørende indflydelse på elevernes valg af løsningsmetode. Hvis eleverne ikke opfatter et udtryk som en ligning, når det rent faktisk er en ligning, så ved de heller ikke, hvilke løsningsværktøjer de skal gribe til i mødet med dette udtryk. Hvad det vil sige at løse en ligning, fremstår også tåget for eleverne. De er med på, at det handler om at få *x* til at stå alene, men formålet med at isolere *x*, og hvad det egentlig betyder og medfører, at *x* f.eks. er lig 2, er ikke klart for dem. Hermed bliver ligningsløsning til en esoterisk og formålsløs øvelse. Denne gruppe af elever kan, viste det sig, hjælpes af en indledende begrebsafklaring efterfulgt af en fastlagt procedure hæftet op på de præcist veldefinerede matematiske begreber.

Lignende problemer har vi set i elevernes arbejde med bevisførelse. For nogle elever i gymnasiet opfattes bevisførelse som et meningsløst ritual, som skal memoreres, snarere end den række af logiske argumenter, der fører til rigtigheden af et påstået udsagn. Disse elever kan hjælpes ved først at italesætte bevisets rolle i faget matematik og dernæst, i lighed med den førnævnte gruppe af elever, knytte en række faste begreber og procedurer til bevisførelsen.

Alt i alt peger vores undersøgelser altså på, at en indledende begrebsafklaring, en generel præcision i sproget og en fast struktureret metode er afgørende i matematikundervisningen. Dette leder til en styrkelse af både kommunikationskompetencen og symbol– og formalismekompetencen, som er to af de otte matematiske kompetencer beskrevet i Uddannelsesstyrelsens kompetenceprojekt (Niss & Jensen 2002. Herefter KOM-rapporten). I de kommende afsnit vil vi uddybe disse elementer fra de tre projektrapporter, som vi har skrevet i forbindelse med matematik vejlederuddannelsen på RUC fra september 2013 til januar 2015. Projektrapporternes titler er *Sprog og ligninger*, *Argumentationssystematik i bevisførelse* og *Struktur og modellering*.

Hvert af de tre forløb bestod af tre faser, som beskrevet af Uffe Thomas Jankvist & Mogens Niss (2015). Eleverne blev bedt om at tage en detektionstest, og på baggrund af denne blev to–fire elever udvalgt per klasse med henblik på diagnosticering. Diagnosticeringen havde et omfang af ca. 20 minutter og havde som formål at identificere de snublesten, der sætter en begrænsning for elevens læring. Under diagnosticeringen forsøgte vi så vidt muligt at tie stille. Vi ville høre, hvad eleven tænkte, samt vedkommendes argumenter herfor, og en af pointerne med diagnosticeringen er netop at høre en eventuel fejlagtig argumentation for på den måde at kunne identificere fejlopfattelser.

Interventionen bestod af tre til fire sessioner af 20 minutters varighed i de første to projekter om ligningsløsning og bevisførelse og tre sessioner af længere varighed i det sidste projekt om modellering. Dette skyldes, at vi i de to første projekter kun vejledte én elev ad gangen, mens vi i modelleringsprojektet arbejdede med gruppeintervention.

Vi arbejdede i samtlige forløb med stx–elever fra 1. g eller 2. g, der havde matematik på B–niveau. En gruppe af tre elever var med i alle tre forløb, idet de startede i 1. g i august 2013 og dermed var midt i 2. g ved uddannelsens afslutning i januar 2015.

Vigtigheden af begrebsafklaring

David Tall og Shlomo Vinner (1981) skelner mellem begrebsbillede og begrebsdefinition. Her er essensen, at eleverne kan have et billede af, hvad eksempelvis en ligning, et bevis eller en model er, som ikke stemmer overens med den korrekte og præcise definition af begrebet. Efter vores arbejde med de tre projekter står det klart, at en succesfuld intervention må starte med, at elev og vejleder bliver enige om, hvad der overhovedet tales om.

Elevernes billede af et begreb kan være fragmentarisk og situationsafhængigt, og de kan have problemer med præcist at definere begrebet. Elevernes sprog afspejler således deres viden om et emne, og vores tese var, at det at træne et præcist sprog således også ville hjælpe eleverne til at få et bedre greb om emnet. Vokabulariet skulle gerne hjælpe på to måder. For det første med præcist at vide, hvad der ligger i et begreb. For det andet ønskede vi ved hjælp af sproget at skabe en vis struktur, sådan at eleverne både lærte ord som f.eks. faktor og led, men også lærte at sætte dem i relation til processen, hvad enten det drejede sig om ligningsløsning, bevisførelse eller modellering.

I vores første projekt om sprog og ligninger (Fuglsang–Damgaard, Bie & Bolvinkel 2014a) indledte vi interventionen med at vise eleverne en række udtryk og bede dem om at udpege de udtryk, der ikke var ligninger. Her viste det sig, at flere elever havde et mangelfuldt

Matematik

begreb om, hvad en ligning er. Således blev ligninger som $(x-3)(x-7)=0$ og $3x^2+5x-2=0$ af en elev afvist, fordi »de ser underlige ud«, mens en anden elev afviste $9=m-5$ som værende en ligning, fordi den ikke indeholdt noget x. Noget så simpelt som at læse en kort definition på en ligning op, nemlig at »en ligning er et udsagn, hvori der indgår et lighedstegn og en eller flere ubekendte«, fik dem til at rette deres fejl.

Ligeså var flere elever ikke klar over, hvad det egentlig vil sige at løse en ligning – eller de var i hvert fald ikke i stand til præcist at formulere det, hvilket udsagn som »at finde« og »det vil sige at finde den ubekendte; altså finde ud af, hvad den er; i forhold til lighedstegnet« vidner om.

Udsagnene er som sådan ikke forkerte, men de er upræcise og mangelfulde og vidner om et ufuldstændigt begrebsbillede. Det er ikke så sært, at eleverne har problemer med at løse ligninger, når de ikke ved, hvad de gør.

Vi forsøgte at hjælpe eleverne med at sætte de korrekte ord på processen, hvilket uddybes i næste afsnit, og baseret på elevernes præstation i den sidste session sammenlignet med deres præstation til diagnosticeringssamtalen har det hjulpet dem gevaldigt. Således bevægede en af eleverne sig fra at beskrive det at dividere i en ligning ved »… så skal man et eller andet sådan her« (tegner en vandret streg) til »jeg dividerer med koefficienten«.

I vores andet projekt om argumentationsteknik i bevisførelse (Fugsang–Damgaard, Bie & Bolvinkel 2014b) blev eleverne i diagnosticeringen spurgt, hvad et bevis er. Også her tegnede der sig et forskelligartet billede af besvarelser, der alle havde noget rigtigt i sig, men som ikke var fuldstændig udtømmende. Vi indledte interventionen med at tale om matematikkens natur og bevisets rolle, herunder hvorfor vi i det hele taget har beviser. Betydningen af ord som 'beviser' og 'sandhed' er besværlige at forstå for eleverne og er i øvrigt et spørgsmål, der har optaget filosoffer i tusindvis af år, så der er ikke noget at sige til, at en elev, uden en diskussion af emnet, har et uklart billede af begrebet. De to begreber blev diskuteret med eleverne, idet matematikken blev sammenlignet med de naturvidenskabelige fag.

Næste skridt var som i første projekt at introducere en struktur i beviset. Vi brugte Stephen Toulmins argumentationsmodel [*)] (Jørgensen & Onsberg 1987) og ord som 'belæg' og 'påstand' og forsøgte på den måde at vise eleverne, at et matematisk bevis er en argumentationskæde og ikke en arbitrær opremsning af matematiske udsagn. Derfor er det altså muligt at lære og huske et bevis ved hjælp af et par holdepunkter samt at huske på de grundlæggende matematiske regler. Som i første projekt tog eleverne ordene til sig, hvilket udsagn som »vores belæg er, at vi kender denne formel fra folkeskolen« og »det er vores påstand, at ...« bevidner.

I det tredje og sidste projekt om struktur og modellering (Fugl- sang–Damgaard, Bie & Bolvinkel 2014c) arbejdede vi med modeller. Igen stod det uklart for nogle elever, hvad en model og en sammenhæng mellem variable egentlig er. Eksempelvis udspillede følgende dialog sig med en elev, der blev bedt om at opskrive sammenhængen mellem antallet af lærere og elever på en skole (Niss & Jankvist 2013b), idet han fik at vide, at der var seks gange så mange elever som lærere på skolen:

Michael: $y = e \cdot 6 + l$, hvor e er eleverne, l er lærerne, og y er formlen, ligesom $y = ax + b$.

Lærer: Hvad betyder det, når der står, at noget skal udtrykke en sammenhæng?

Michael: Øh … det ved jeg ikke … er det så forkert at lave en model?

Ligesom i de foregående projekter arbejdede vi her med at strukturere processen for eleverne, sådan at de kunne få nogle værktøjer til at finde et sted at starte. Vi valgte at lave gruppeintervention denne gang, og oplevelsen var den samme som i de foregående to projekter, nemlig at eleverne ved hjælp af en simpel procedure og en sikrere brug af begreber kom meget længere i processen end tidligere.

Samlet kan altså siges, at en begrebsafklaring og en struktur afledt af et præcist sprogbrug har vist sig at være en uundværlig del af interventionen. Eleverne udtrykte selv stor begejstring i samtlige projekter over deres udbytte af så relativt kort tidsforbrug (80 – 100 minutter). Deres øgede selvsikkerhed har været tydelig at spore, ligesom en generel tro på egne evner inden for matematikken er blevet styrket. Det gælder både henover de tre til fire gange, det enkelte forløb varede, og i de almindelige matematikmoduler, efter at forløbet var afsluttet. Vores vurdering er dog, at hvis effekterne også skal være holdbare på endnu længere sigt, så bør man fortsætte arbejdet med disse elever kontinuerligt. Her kunne man f.eks. tilbyde dem korte brush–up–kurser efter hvert forløb eller repetitionsgange af tidligere gennemgået stof.

[*)] Stephen Toulmins argumentationsmodel skildrer argumenters opbygning med seks elementer, hvoraf de tre er faste (påstand, belæg, hjemmel), og de tre er frie (styrkemarkør, gendrivelse, rygdækning). Vi har alene arbejdet med grundmodellen, som består af argumenter med de tre faste elementer.

Struktur

Når den indledende begrebsafklaring er klaret, hvordan kan man så støtte sine elever i den videre læringsproces, så udbyttet bliver størst? Vi vil her uddybe, hvordan man kan strukturere strategiske testspørgsmål og procedurer i undervisningen.

Sproglig struktur i ligningsløsning

I forløbet om ligningsløsning var første skridt at afdække, hvad en ligning overhovedet er. Dernæst afsøgte vi, om eleverne kunne italesætte, hvad det vil sige at løse en ligning, og hvad det vil sige, at noget er en løsning til en ligning. Her spørges Helle om, hvad det vil sige at løse en ligning:

Helle: Man skal finde x eller b eller c.
Lærer: Hvad gælder der om det tal, du finder?
Helle: Det ved jeg ikke.

Herefter løser Helle ligningen $2x + 5 = 17$ og får $x = 6$. Hun spørges: Lærer: Hvad betyder det, at $x = 6$?

Helle: Det ved jeg faktisk ikke.

Hun bliver bedt om at sætte $x = 6$ ind i den oprindelige ligning, og hun får $13 = 17$, idet hun regner venstresiden ud som $2 + 5 + 6$.

Lærer: Er det rigtigt?
Helle: Nej … eller jo. Er det en ligning, når der ikke er noget x?

Sekvensen viser, at selv om Helle måske nok kan udføre de matematiske operationer, der skal til for at løse denne ligning, så har hun ikke rigtigt nogen idé om, hvad løsningen er et udtryk for. Derfor er man som lærer nødt til at sikre sig, at det står klart for eleverne, hvad løsningen betyder i både en matematisk og virkelighedsnær kontekst.

Ikke alle elever behersker ved indgangen til gymnasiet at løse simple førstegradsligninger. Her følger et par eksempler på de udfordringer, eleverne kan møde.

En elev blev præsenteret for ligningen $4b = 4 + b$, som er taget fra detektionstest 1 (Niss & Jankvist 2013a):

Lene: Det irriterer mig, at der ikke står x.
Lærer: Skal vi se på den, hvor der står x?
Lene: Ja, er det ikke det, vi plejer?

Ligningen lyder $4x = 4 + x$.

Lene: Man skal ligesom minusse noget herovre, for at det bliver isoleret.

Lene trækker x fra på begge sider, så der står $4x – x = 4$.

Lene: Det er vel bare 4 … x?

Lene hjælpes og får udtrykket $3x = 4$.

Lene: Så skal man et eller andet sådan her.

Lene tegner en vandret streg under $3x$ og under 4.

Lærer: Hvorfor det?
Lene: Det ved jeg ikke. Det skal man bare …
Lærer: Hvorfor vil du dividere?
Lene: Det skal man bare.

Sekvensen viser, dels at Lene har et snævert begrebsbillede af en ligning, og dels at hun opfatter ligningsløsning operationelt og ikke strukturelt (Sfard 1991). Dvs. at ligningsløsning for Lene bliver en proces, der indeholder en række handlinger og fremgangsmåder, som hun har svært ved at begrunde, men som hun i nogen grad er i stand til at foretage. Det peger derfor også på, at hun har en instrumentel tilgang til ligningsløsning fremfor en relationel, da dette ville kræve, at hun udover at kunne foretage de konkrete operationer også skulle vide, hvorfor hun foretog dem (Skemp 1979) (den relationelle tilgang). Dette er hukommelsesmæssigt en omfattende proces, og kun med den strukturelle opfattelse (som er knyttet til det matematiske objekt) kan eleverne genkende objektet og manipulere det i andre sammenhænge. Det peger på mangler inden for både symbol– og formalismekompetencen og kommunikationskompetencen (Niss & Jensen 2002). Fordi Lene ikke forstår spillereglerne i ligningsløsning, kan hun heller ikke sætte ord på sin metode, som bliver en svær og måske meningsløs procedure for hende.

Men vi kan hjælpe Lene og andre i hendes situation ved at lære hende fagvokabulariet (led, faktor, koefficient m.m.) og reglerne, der knytter sig til elementerne i ligningsløsning, samt insistere på, at hun anvender de rigtige ord og betegnelser. Mere konkret giver vi Lene en ordliste, der består af to søjler – en begrebssøjle og en eksempelsøjle, hvorefter vejlederen gennemgår et begreb ved at forklare, hvad det betyder, og hvornår det bruges. Derefter anvendes det på et eksempel, så eleven kan høre, hvordan begrebet bruges i en sætning. Slutteligt prøver eleven selv ved at gennemgå et par eksempler, som vist på modstående side.

Regler formuleret i ord

- Reglerne introduceres gennem eksempler.
- Man må lægge det samme tal til på begge sider af lighedstegnet.
- Man må trække det samme tal fra på begge sider af lighedstegnet.
- Man må gange med det samme tal i alle led på begge sider af lighedstegnet (dog ikke 0).
- Man må dividere med det samme tal i alle led på begge sider aflighedstegnet (dog ikke 0).

Efter så lille en intervention oplevede vi til vores overraskelse, at de forholdsvis svage elever, vi havde arbejdet med, nu havde en reel løsningsstrategi baseret på handlinger, der rent sprogligt var indlært.

Begreb	Eksempel
Lighedstegn	=
Regneoperationer	Lægge til Trække fra Gange Dividere
Led adskilles af + og –	$8x + 4 - 3y$
Led, der lægges sammen, giver en sum	$5y + 3y = 8y$, hvor $5y$ og $3y$ er led, og $8y$ er summen (og et led) $3x + 14x + x = 18x$ $9 + 2 + 4 + 3 = 17$
Led, der trækkes fra hinanden, giver en differens	$3a - a = 2a$, hvor $3a$ og a er led, og $2a$ er differensen (og et led) $p - 8p = -7p$
Man ganger faktorer med hinanden, og man får et produkt	$5 \cdot 6 = 30$, hvor 5 og 6 er faktorer, og 30 produktet $3z \cdot 8 = 24z$
Den ubekendte	I en ligning angives den ubekendte med et symbol, eksempelvis x, m eller t, og det er værdien af den ubekendte, der skal findes
Koefficient er den faktor, der står foran den ubekendte	$4 \cdot y$, hvor 4 og y er faktorer, 4 er koefficient, og y er ubekendt

F.eks. kommer Lenes løsning af ligningen nu til at starte med en konstatering af: »Der er to led på højre side og et led på venstre side«, »jeg samler led med den ubekendte på højre side«, »jeg trækker 4 fra på begge sider« og »jeg dividerer med koefficienten til den ubekendte på begge sider«.

Det korrekte matematiske sprog giver et stillads for mønstergenkendelse og øger dermed elevernes forståelse af ligningen og dens elementer. Hermed har eleverne fået styrket to kompetencer fra KOM–rapporten, nemlig kommunikationskompetencen og symbol– og formalismekompetencen, en styrkelse, der hviler på den faste procedure ved konsekvent at bruge begreberne fra ord– og regellisten.

Sproglig struktur i bevisførelse

Bevisførelse er en væsentlig del af matematikundervisningen og en obligatorisk del af den mundtlige eksamen på B– og A–niveau, men hvordan sikrer man sig, at det ikke bliver en gang rituel udenadslære? Vi mødte hos vores elever forestillinger om bevisførelse som henholdsvis »lange og indviklede«, »med en høj forklaringsgrad« eller bare »mærkelige« (Fuglsang–Damgaard, Bie & Bolvinkel 2014b), hvilket er meget naturligt, set i lyset af, at bevisførelse som disciplin er helt ny for dem. Som tidligere nævnt er det vigtigt at begrebsafklare, så eleverne fra begyndelsen har en fornemmelse af, hvilken status bevisførelse har i matematik, nemlig en status, som er fundamentalt anderledes end i alle andre fag. Dernæst kan man, ligesom med ligninger, stilladsere elevernes forståelse ved hjælp af en række strategiske holdepunkter.

Vi tog udgangspunkt i Toulmins argumentationsmodel og måden, den anvendes på hos Christine Knipping (2008), ved at vise eleverne, at der altid er nogle faste mønstre og strukturer, som kan kobles på Toulmins begreber. Vi startede med at lægge vægt på, at ordet 'sætning' henviser til to forskellige ting, alt efter om man bruger det i dansk eller i matematik. Det er vigtigt, fordi eleven ofte kun har den danskfaglige reference (eller den almenkendte definition af ordet), og for at forstå, hvad indholdet af en matematisk sætning er, skal man altså se ud over denne. En matematisk sætning er mere at opfatte som en påstand, og for at argumentere for dens rigtighed kan man gøre brug af argumentationsanalyse og spørge:

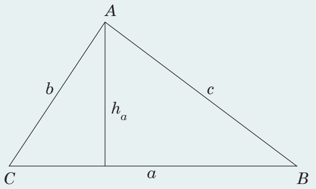
»Hvorfor gælder denne sætning?«

I matematik vil der så følge en række begrundelser eller belæg, der slutteligt vil ende i hovedpåstanden. Vi ville forsøge at hjælpe eleven til en mere sikker bevisstrategi gennem altid at starte med at skrive hovedpåstanden op, tegne en eventuel skitse samt huske et til to holdepunkter gennem beviset. Hvis eleven følte sig sikker på, hvordan beviset er skruet sammen, håbede vi, at eleven kunne gennemgå et bevis uden at føle sig nødsaget til at lære det udenad eller læse op fra et papir (Fuglsang–Damgaard, Bie & Bolvinkel 2014b). Vokabulariet, der skal læres og trænes, er påstand, belæg, definition, sætning, argumentationskæde, forudsætning, kendt viden og holdepunkter, og på illustrationen nedenfor er vist, hvordan eleverne kan støttes gennem brug af termerne. Her er der tale om beviset for en af formlerne for arealet af en trekant, og meningen er, at eleverne ud fra disse punkter skal kunne gennemføre beviset.

Sætning: (Hovedpåstand)
I en vilkårlig trekant ABC gælder, at arealet er $T = 1/2 \cdot a \cdot b \cdot \sin(C)$.

Bevis: (Argumentationskæde)

Holdepunkter:
Kendt viden
Skitse



Kendt viden:
Arealet af en trekant er
$T = 1/2 \cdot h_a \cdot a$
Sinusformel i retvinklet trekant
$\sin(v)$ = mod/hyp

Hvordan lyder det så, når en elev skal bruge begreberne efter at være præsenteret for dem? Her møder vi Mette, der netop skal gennemgå beviset for arealformlen uden noter:

Mette: Uden?!
Lærer: Ja, uden at du kigger i dine noter.
Mette: Så jeg må slet ikke kigge i dem?!

Mette mindes nu om begreberne *hovedpåstand*, *påstand*, *belæg*, *argumentationskæde* og *holdepunkt*, hvorefter hun straks går i gang ned at opskrive hovedpåstanden og tegner en skitse, som fungerer som holdepunkt.

Mette: Så har jeg en påstand, der hedder sin(C) er lig med højden fra A divideret med b. Mit belæg for det, det er så denne her påstand [Mette peger på sin(v) = modstående/hypotenusen]. Og jeg ved jo så, at den modstående katete ... det fandt jeg ud af, at det var h_a, fordi at hvis jeg tog denne her retvinklede trekant heroppe i mit holdepunkt, så hedder den modstående katete h, højden fra A. Og jeg ved, at hypotenusen hedder lille b.
Lærer: Ja.
Mette: Og så har jeg en ny påstand, der hedder $T = 1/2 \cdot a \cdot \sin(C) \cdot b$. Og belægget for det er så både denne her påstand (Mette peger på arealformlen for en retvinklet trekant) og denne her påstand (peger på $\sin(C) = h_a/b$). I den her (peger igen på $\sin(C) = h_a/b$) skal h_a isoleres. Det gør jeg ved at gange med b på begge sider.

Da Mette har gennemført beviset, konfronteres hun med, at hun har gennemført beviset uden at kigge på sit papir.

Mette: Ja. Jeg prøvede at huske, hvad der stod på papiret, men det kunne jeg ikke helt, og så tænkte jeg, ok, det er bare påstand, belæg, påstand, belæg.
Lærer: Har denne her metode hjulpet dig til at gennemgå et bevis?
Mette: [Tænkepause] Det synes jeg fordi at da jeg skulle øve det derhjemme i går, så kiggede jeg heller ikke på de her papirer, og så tænkte jeg bare, at jeg skal huske, at jeg skal have hovedpåstand, påstand og belæg og holdepunkt. Og så kiggede jeg også andre beviser igennem, og så tænkte jeg, at nu giver det faktisk mening. Nu ved jeg, hvad der er hvad og sådan noget.

Sekvensen antyder, at Mette har fået et redskab til at kunne læse beviser, så hun bedre kan forstå og overskue de forskellige trin, der er i et matematisk bevis – og ikke mindst hvorfor de forskellige trin optræder i beviset. Vi skal dog påpege, at ikke alle vores elever klarede det helt så godt. Dette skyldes imidlertid ikke brugen af begreber og holdepunkter, som var en stor hjælp for alle. Snarere viste det sig, at problemerne opstod i udførelsen af de algebraiske manipulationer. Det er ærgerligt, at det er disse, der skal bremse for en mere flydende gennemgang, når nu eleverne faktisk både ved, hvad et bevis er, og kender og kan bruge argumentationsterminologien. Men det peger også på, at ligningsløsning og algebraisk sikkerhed er fundamentale egenskaber i mange af gymnasiematematikkens grene.

Sproglig struktur i modellering
Arbejdet med matematiske modeller i gymnasiet kan tage flere former. Eleverne kan eksempelvis manipulere med en kendt model for at finde værdien af en ukendt variabel, de kan få til opgave at forklare betydningen af konstanter og variable i en model, eller de kan blive bedt om at opstille en matematisk model på baggrund af en sproglig beskrivelse. I vores tredje projekt koncentrerede vi os om denne sidstnævnte matematisering, dvs. den helt konkrete oversættelse fra sprog til matematik.

Som i de tidligere projekter ønskede vi via sproget at strukturere elevernes arbejde med matematiseringen. Endvidere ønskede vi at undersøge, hvorvidt opgaver stillet i et letgenkendeligt ekstra matematisk domæne var lettere at arbejde med for eleverne end opgaver stillet i et mindre genkendeligt ekstramatematisk domæne. Sagt på en anden måde ville vi undersøge, om elever har lettere ved modelleringsopgaver omhandlende computerspil, tøjindkøb og lignende end ved opgaver, der omhandler, hvor meget en hundestejle forbrænder i timen afhængigt af dens alder.

Vores arbejde med eleverne afslørede, at sproget endnu en gang var en snublesten. For det første var eleverne usikre på betydningen af matematiske begreber som sammenhæng og model, hvilket kan ses i Michaels tidligere udsagn, hvor han troede, at en sammenhæng skal være på en for ham velkendt form, og dermed griber han den lineære model uden at overveje, hvad opgaven egentlig går ud på. Dette illustreres også i følgende samtale, hvor Rikke (2. g) bliver bedt om at opskrive en sammenhæng, der illustrerer, at der er seks gange så mange elever som lærere på en skole:

Rikke: [skriver $x + 6x$] Jeg tænker, at antallet af lærere må være x, og så må antallet af elever være $6x$.
Lærer: Hvad tænker du, når der står, at

du skal opskrive en sammenhæng mellem antallet af lærere og elever? Hvad er det egentlig, der bliver spurgt om?
Rikke: Det ved jeg ikke ...

Endvidere forstyrrede flere ikke–matematiske ord eleverne i deres arbejde. Dette var både ord som normalt forbindes med andre fag, men også 'dagligdagsord' som træterning og omkostninger.

Som i de tidligere forløb var vores første indsatspunkt derfor at hjælpe eleverne med at skabe orden i opgaven, og til dette formål udarbejdede vi med udgangspunkt i Cardalle–Elawar (1995) en række hjælpespørgsmål:

1. *Forståelse*. Forstår jeg betydningen af ordene? Forstår jeg meningen med opgaven?
2. *Visualisering*. Kan jeg tegne en model af problemstillingen? Kan jeg visualisere den?
3. *Sortering*. Har jeg alle nødvendige informationer? Hvilke informationer er vigtige, og hvilke er ikke vigtige?
4. *Symboler og eksempel*. Navngiv de variable og konstante størrelser. Prøv at lave et eksempel, hvor du indsætter talværdier.
5. *Formel*. Opskriv sammenhængen mellem de variable og konstante størrelser som en formel.
6. *Beregning*. Hvordan skal jeg beregne løsningen? Hvilke matematikoperationer har jeg problemer med?

Vi valgte at arbejde med grupper á tre–fire elever i dette forløb, fordi vi mente, at eleverne ville have glæde af at diskutere med hinanden i stedet for at tænke højt foran læreren. Det tredje hjælpespørgsmål har som formål at få eleverne til at indse, at en matematisk model ikke kan inkorporere samtlige variable. I den første udgave af vores hjælpespørgsmål var beregningseksemplet i spørgsmål fire udeladt. Arbejdet med eleverne viste dog, at de var meget glade for at arbejde med helt konkrete værdier, og at et konkret eksempel hjalp dem med at opstille den generelle sammenhæng. Eleverne blev nu udsat for en række opgaver, som de diskuterede, mens læreren observerede og hjalp på vej, når og hvis det var nødvendigt. Opgaverne så ved første øjekast meget forskellige ud. Nogle havde en letgenkendelig kontekst, mens andre var mere tekniske og skrevet i et sprog med et stort antal fremmedord. De underliggende matematiske modeller adskilte sig ikke nævneværdigt i sværhedsgrad; det var alene 'indpakningerne', der var forskellige. Dette var helt bevidst, idet vi ønskede at undersøge, om konteksten havde en betydning for elevernes evne til at løse opgaverne på modstående side:

- Hvor lang tid holder en flaske shampoo?
- Prisen på en taxatur kan beskrives ved $y = 5x + 25$, hvor x angiver antallet af kørte kilometer, og y angiver den samlede pris. Er det en god model?
- Et vandkraftværk er et anlæg til produktion af elektricitet, hvor man udnytter en faldhøjde (potentiel energi) af en vandmasse til at drive en vandturbine, som er koblet til en generator. Hvor meget skal en kilowatttime koste for at dække omkostningerne ved at have et vandkraftværk?
- Giv et forslag til et betalingssystem i et parkeringshus ved siden af et varehus, der hverken skræmmer kunderne væk eller resulterer i, at de holder der 24 timer i døgnet.
- Opstil en matematisk model, der kan afgøre, hvilken kø man skal vælge i et supermarked.

Efter den indledende begrebsafklaring af begreber som sammenhæng, model, variable og konstanter kastede eleverne sig over opgaverne. Allerede fra første samtale observerede vi, at eleverne var gode til at indse, at en model ikke kan tage højde for samtlige variable, og at nogle variable derfor må frasorteres. I starten kneb det gevaldigt med matematiseringsdelen, men inklusionen af arbejdsspørgsmål fire, der kalder på et konkret eksempel, viste sig at give eleverne det sidste skub på vejen. Følgende samtale udspillede sig i en 1.g–gruppe, der arbejdede med sidste opgave, hvor de skulle opstille en matematisk model, der kunne afgøre, hvilken kø man skulle stille sig ved i et supermarked.

Henriette: Man kunne vælge at sige, hvor lang tid det i gennemsnit tog en kunde at komme igennem med x antal varer. Men så skal man beslutte sig for et eller andet.
Mark: Men du skal også have et starttal, for det tager jo, hvad, 20 sekunder at betjene hver kunde? Så det kunne hedde $y = x \cdot 20 + 20$, hvor x'et er antal varer.
Amanda: Men tager det 20 sekunder for hver vare?
Mark: Skal vi sige 3 sekunder?

Eleverne får herefter opstillet sammenhængen $y = 3x + 20p$, hvor x er antallet af varer i køen, og p er antallet af personer. Denne formaliserer de yderligere, så de får, at $y = qx + zp$, hvor q er antal sekunder pr. vare, og z er antal sekunder pr. personlig betjening.

Begrebet om en matematisk model er således ikke længere fremmed for eleverne, og det at introducere variable i en matematisk model er blevet noget, de bare gør. Begrebsafklaringen har gjort dem i stand til at samtale om en model ved brug af korrekte matematiske begreber, og brugen af et konkret taleksempel har fungeret som katalysator for arbejdet hen mod en færdig model.

Forløbet viste også, at man gør eleverne en bjørnetjeneste ved at stille dem foran modeller, der beskriver indviklede videnskabelige sammenhænge. Det er meget muligt, at sådanne modeller har en baggrund i den virkelige verden, men det virker forstyrrende for eleverne. Snarere bør introduktionen til modellering foregå ved brug af simple, letgenkendelige modeller skrevet i et hverdagsagtigt sprog og omhandlende genkendelige kontekster. I opgaven om vandkraftværket sagde en elev eksempelvis: »Jeg skal læse den [teksten] en milliard gange og bruger for lang tid på det. Selv om jeg læser og forstår ordene, kan jeg ikke holde fokus«, og en hel gruppe vidste simpelthen ikke, hvad en kilowatttime er.

Lighedstegnet og dets betydning

I samtlige projekter var en mangelfuld symbol– og formalismekompetence et evigt problem. Det var ikke så overraskende i første projekt, hvor problemer med at forstå lighedstegnets betydning naturligt nok vil resultere i problemer med at løse en ligning. En elev havde som beskrevet tidligere problemer med at svare på, om 13 = 17 er korrekt. Eksemplet viser, at lighedstegnet ikke nødvendigvis udtrykker ækvivalens for eleven og derved heller ikke opfattes som et relationelt eller operationelt tegn.

I tredje projekt om matematisk modellering ses nogle af de samme problemer med lighedstegnet som i første projekt. Matias skriver relationen »1= 6«, som skal betyde, at for hver gang der er en lærer, er der seks elever. Ligesom for Helle betyder det ikke, at begge sider er ens, ej heller er det en opfordring til at udføre en regneoperation. Man kunne få den mistanke, at Matias ikke har forstået, hvad opgaven går ud på, men det viser en senere forklaring, at han har. Faktisk udtrykker han meget præcist den lineære relation, der er imellem antal lærere og antal elever: »Formlen skal på en eller anden måde være: For hver gang der er én lærer, det vil sige vokser med 1, så skal den gå 6 op«. Men han pointerer faktisk i en sætning lige før også, hvad problemet er. Han mestrer simpelthen ikke det sprog, som skal bruges til at udtrykke den matematiske relation: »Problemet er, at jeg ikke umiddelbart ved, hvordan jeg skal formulere det«. Så kommunikationskompetencen er stækket, fordi han mangler de matematiske byggesten i form af symbolsproget, han skal udtrykke sig med.

Men hvordan får så Helle og Matias idéen om at godtage åbenlyst forkerte udtryk? Der er noget forskelligt på spil hos dem, selv om eksemplerne kan se ens ud. For Matias' vedkommende tror vi, at hans problemer skyldes, at hverdagssproget har overtaget i modelleringskonteksten. Ser man på, hvordan man i dagligdags sprog anvender formuleringer som »der sættes lighedstegn mellem«, kan en hurtig Googlesøgning afsløre et hav af forskelligartede udtryk. Fra en RUC–opgave om sundhedsfremme (Hasanbegovic 2013) fås citatet: »Dette i så høj grad, at der er tendenser til, at der sættes lighedstegn mellem at være tynd og at være sund«. Og fra en artikel i Ugeskrift for Læger (Eika & Malling 2013) ses: »Et andet forslag har været at sætte lighedstegn mellem professionalisme i udøvelsen af lægegerningen og evnen til at kunne argumentere for (reflektere over) de valg, man træffer«.

Dette er blot to eksempler på, hvordan »at sætte lighedstegn mellem« bliver brugt i videnskabelige sammenhænge i en ikkematematisk kontekst. Men i en matematisk forstand ville disse lighedstegn være lige så lidt gyldige som dem, Matias arbejder med, fordi det synes klart, at der ikke er ækvivalens mellem at være tynd og være sund eller mellem at være professionel og at kunne argumentere for sine valg. Vi mener derfor, at brugen af lighedstegnet knytter sig til en sproglig opfattelse af det, hvor der gemt i symbolet ligger en forkortelse af en række sproglige elementer. Tegnet kan skifte karakter efter sammenhængen, det bruges i, og udtrykker ikke ækvivalens. Men det kan udtrykke essensen af opgavens logiske forbindelsesord (for hver lærer er der seks elever) eller årsagssammenhæng (hvis der er én lærer, så er der seks elever). Og det kan indeholde småord, der i en matematisk kontekst er afgørende, men som i hverdagssproget ikke har den store betydning. Et eksempel herpå ses i en opgave om en terning, hvor Matias skriver »6 = sider«. På højre side burde der stå »antal sider«, hvis lighedstegnet skulle udtrykke ækvivalens.

Konklusion

I vores tre projekter forsøgte vi at hjælpe eleverne ved at sætte ind på to fronter. For det første arbejdede vi med at begrebsafklare, så der blev skabt enighed om, hvorom der samtaltes, og begrebet blev afmystificeret. For det andet skabte vi struktur inden for de forskellige matematiske områder ved at anvende begreberne på en systematisk måde.

Resultatet var overvejende positivt. Eleverne tog begreberne til sig og viste store fremskridt, hvad enten det var inden for ligningsløsning, bevisførelse eller modellering. Derudover øgedes deres selvtillid og glæden ved faget, om end effekten af at blive set og have tid alene med læreren ikke må undervurderes.

Vi er samtidig blevet meget bevidste om, at visse mangler inden for symbol– og formalismekompetencen spænder ben for eleverne inden for alle matematiske områder. Dette understreger vigtigheden af at have fokus på den algebraiske manipulation.

Langtidseffekterne af matematikvejledningen for vores elever er sværere at sige noget entydigt om. En enkelt elev har valgt matematik på A–niveau og klarer sig over gennemsnittet. Til den skriftlige eksamen i sommeren 2015 har de elever, der har været oppe, alle bestået med middelkarakterer eller derover. Træerne vokser dog ikke ind i himlen. To elever, der både deltog i matematikvejledningen i 1. g og igen i 2. g, har i deres terminsprøver begge fået 00. Dette viser os, at det kræver en målrettet indsats fra både elever og lærere, også efter at vejledningsforløbet er tilendebragt, at fastholde de positive effekter af forløbet.

I vejledningen har vi haft fokus på begrebsafklaring og struktur som en metode til at afhjælpe matematikvanskeligheder hos svage elever. Men det er ikke en metode, der udelukkende er forbeholdt vejledningssituationen. Vi har begge kunnet overføre den til klasseundervisningen, hvor resten af klassens elever har lige så meget brug for præcision i sproget og klare strukturer, som de svage elever har.

Referencer

- Cardelle–Elawar, Maria (1995): *Effects of metacognitive instruction on low achievers in mathematics problems. Teaching and Teacher Education*, vol. 11, s. 81–95.
- Eika, Berit & Bente Vigh Malling (2013): *Speciallægeuddannelsens rolle som professional er kompleks og bør*

Matematik

omdefineres. Ugeskrift for Læger, vol. 175(24), s. 1709–1712.

- Fuglsang–Damgaard, Anne Calina, Marianne Bie & Hans Bolvinkel (2014a): *Sprog og ligninger*, projektopgave 1, matematikvejlederuddannelsen. Roskilde Universitet.
- Fuglsang–Damgaard, Anne Calina, Marianne Bie & Hans Bolvinkel (2014b): *Argumentationsteknik i bevisførelse*, projektopgave 2, matematikvejlederuddannelsen. Roskilde Universitet.
- Fuglsang–Damgaard, Anne Calina, Marianne Bie & Hans Bolvinkel (2014c): *Struktur og modellering*, projektopgave 3, matematikvejlederuddannelsen. Roskilde Universitet.
- Hasanbegovic, Azra, Marlene Højmark, Pia Laursen, Ulla Uldahl & Christina Olofsson Sørensen (2013): *Når sundheden skal frem & vægten skal ned! Hvad er der på spil i en sundhedsfremmende kommunal intervention?* Master i sundhedsfremme. Roskilde Universitet.
- Jørgensen, Charlotte & Merete Onsberg (1987): *Praktisk argumentation*. Teknisk Forlag, Viby.
- Knipping, Christine (2008). *A method revealing structures of argumentations in classroom proving processes. ZDM – The international Journal on Mathematics Education*, vol 40, s. 427–441.
- Niss, Mogens & Uffe Thomas Jankvist (2013a): *57 Spørgsmål fra Professoren* (detektionstest 1). Materiale udleveret til matematikvejlederuddannelsen, Roskilde Universitet.
- Niss, Mogens & Uffe Thomas Jankvist (2013b): *13 Spørgsmål fra Professoren* (detektionstest 3). Materiale udleveret til matematikvejlederuddannelsen, Roskilde Universitet.
- Niss, Mogens & Tomas Højgaard Jensen (2002): *Kompetencer og matematik læring – ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr. 18. Undervisningsministeriet, København.
- Sfard, Anna (1991): *On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics*, vol. 22, s. 1–36.
- Skemp, Richard R. (1979): *Goals of learning and qualities of understanding. Mathematics Teaching*, vol. 88, s. 44–49.
- Tall, David & Shlomo Vinner (1981): *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics*, vol. 12, s. 151–169.

Foreningen af eksaminerede matematikvejledere

Foreningen af eksaminerede matematikvejledere ved de gymnasiale uddannelser har tidligere i LMFK–bladet givet et indblik i, hvordan man på et grundlag af matematikdidaktisk forskning kan arbejde med elever, der udviser særlige læringsvanskeligheder i matematik. Det vil vi gerne gøre igen ved at præsentere endnu en artikel skrevet af to kolleger, der på det andet hold gennemførte uddannelsesprogrammet til matematikvejleder ved Roskilde Universitet.

Artiklen, som er et gentryk af kapitel 1 i bogen *"Læringsvanskeligheder i matematik – hvordan kan de forstås og afhjælpes"*, Forlaget Frydenlund, viser noget af den matematikdidaktik, vi benytter i vores arbejder som vejledere, men også i høj grad som undervisere. Bogen indeholder fem yderligere kapitler, skrevet af andre matematikvejledere, samt en indledning.

En tidligere bog skrevet af matematikvejledere, *"Fra snublesten til byggesten"*, udkom i 2016 ligeledes på Forlaget Frydenlund. Artiklen er ikke mindst tænkt som en invitation til, at vi matematiklærere som faggruppe bliver bedre til at udveksle solidt funderede didaktiske overvejelser og tiltag, meget gerne her i bladet.

Fra foreningen vil vi gerne takke LMFK, Forlaget Frydenlund, bogens to redaktører samt kapitlets to forfattere for at gøre det muligt.

Nærmere oplysninger om *Foreningen af eksaminerede matematikvejledere* kan fås hos formanden, *Morten Stoklund Larsen*, matematikvejleder.dk

For yderligere information kan følgende link benyttes: Matematikvejleder RUC, ruc.dk/matematikvejleder

Under forudsætning af tilstrækkelig deltagelse optages endnu et hold matematikvejledere i efteråret 2018. Opnås ikke fornøden deltagelse til dette hold, vil uddannelsen blive nedlagt.

Fra snublesten til byggesten: frydenlund.dk/varebeskrivelse/3773
Læringsvanskeligheder i matematik: frydenlund.dk/varebeskrivelse/3944

Matematik