Til Grønland med forforståelse og mentale skabeloner

Ole Andersen, VUC Århus

Her i de senere år har jeg forsøgt at udarbejde en læringsteori tilpasset matematik og naturvidenskab, fordi jeg mener, at de traditionelle læringsteorier ikke er repræsentative for de problemer, som vi står med i den danske gymnasieskolen her i 2015. Men jeg skulle til Grønland for at få skrevet en kort introduktion, som jeg her vil præsentere.

Forforståelse

Når man flyver med Air Greenland til Grønland, lander man i *Kangerlussuaq*. Ups, det var ikke nemt. Hvordan udtaler man det? Så er det langt lettere med det danske navn *Søndre Strømfjord*. Her er man ikke i tvivl om udtalen, og det er langt lettere at huske. Sjovt nok har jeg det tilsvarende med de andre grønlandske stednavne. Baggrunden er selvfølgelig, at de danske stednavne er opbygget af nogle lyde og nogle delstavelser, som jeg kan genkende fra det danske sprog. Men det betyder, at disse stednavne er en del af en større sammenhængende sproglig struktur. At forstå og beherske ordet og dets udtale forudsætter med andre ord, at man behersker meget mere, end lige det enkelte ord – at man behersker et helt sprog eller i hvert fald en del af et helt sprog. En sådan forudsætning vil jeg kalde en *forforståelse*.

Desværre er en sådan forforståelse ikke helt nem at lære. Man kan selvfølgelig forsøge at meddele sig til andre, fx i form af udtaleregler osv., men det er ikke nødvendigvis dækkende. Og måske heller ikke særlig interessant. I hvert fald behersker langt de fleste et sprog uden at kunne formulere regler for udtale, grammatik mm. Dette tyder på, at denne forforståelse ikke er bevidst, men tværtimod dækker over en række ubevidste vaner, traditioner osv. – som et isbjerg. Selve bjerget er meget større, end det man ser. Hovedparten skjuler sig under vandet, og det er en vigtig del, fordi det holder den synlige del af isbjerget over vandet.

Dette minder til forveksling om at lære matematik i hvert fald på et indledende niveau. Her er det også vigtigt med en stor grad af forforståelse, som desværre er svær direkte at formidle, men som alligevel er en særdeles vigtig del af det at beherske matematik. Først, når man har lidt mere erfaring med matematik, kan man bedre selv på egen hånd tilegne sig og forstå matematikken, fordi man her er bekendt med den underliggende tankegang.

Skabeloner

Hvordan lærer man så en sådan forforståelse? Ved øvelse og træning vil de fleste svare. Problemet er blot, at man kan træne på så mange måder, og det er så sandelig ikke al træning, der er lige god. Vi skal med andre ord have mere struktur på denne forforståelse for at kunne udtale os mere kvalificeret om, hvordan der kan trænes.

I forbindelse med min egen undervisning i matematik har jeg bemærket, at mine elever har meget nemmere ved at overskue en opgave, hvis de følger en skabelon som fx denne, når de skal løse en andengradsligning:

$2x^2 + 3x + 1 = 0$
$a = 2$
$b = 3$
$c = 1$
$d = b^2 - 4ac = 3^2 - 4\cdot 2\cdot 1 = 9 - 8 = 1$
osv.

Men hvis denne skabelontænkning fungerer i disse tilfælde, hvorfor så ikke også i andre tilfælde? Så jeg forsøgte at lære min datter, som på daværende tidspunkt gik i 1. klasse, bogstavregning. Og det lykkedes sandelig. Ikke fordi jeg holdt et større oplæg. Næ, det foregik nærmest hen over køkkenbordet:

”Julie, hvis $a + a = 2a$.
Hvad er så $a + a + a$?”

På den måde lærte hun at udregne udtryk som:

$a + a$
$a + a + a$
$2a + a$
$3a - a$

Dette kan man på en ret enkel måde udnytte i sin planlægning. Hvis eleverne på den måde primært tænker i skabeloner, tænker de altså i mønstre, som de tidligere har set. Ved at stille opgaver, så de minder om hinanden med en lille tvist til næste opgave, skal man ikke instruere så meget, og mange af detaljerne lærer man ved at prøve sig frem.

Nu kunne man lege med tanken og spørge sig selv: *Hvad nu, hvis al matematisk viden og kunnen var skabeloner?* Besnærende tanke, men der er da også problemer. Skarpt formuleret ville det betyde, at eleverne først har lært at reducere, når de har dannet en skabelon til alle udtryk, dvs. de har reduceret samtlige udtryk, der findes. Sådan fungerer det heldigvis ikke, og derfor forsøger alle, der underviser i matematik, da også at opøve en overordnet forståelse som fx, at bogstaver blot er tal, som vi ikke kender. Den formulering er der masser af muligheder for at henvise til undervejs. Har en elev eksempelvis svært ved at udregne $a - a$ kan man eksempelvis foreslå dem at prøve med 5 – 5. Derved træner man hele tiden den bagvedliggende forståelse. Den er utrolig vigtig, for selvfølgelig glemmer man meget let alle de ”små” skabeloner, som jeg fremover vil benævne *”konkrete skabeloner”*.

Hov, er der da flere slags skabeloner? Ja, det er der. Man kan nemlig redde tankegangen ved at indføre to slags skabeloner, nemlig *konkrete* og *generelle* skabeloner. Konkrete skabeloner er afgrænsede i deres virke, og de generelle har et bredere virkefelt. Den omtalte bagvedliggende forståelse er et eksempel på en generel skabelon. Der er ikke nogen skarp adskillelse mellem de to kategorier. Jeg vil snarere sige, at en skabelon kan være mere eller mindre af det ene eller det andet.

Da dette afsnit er ret kompakt, skal man måske læse det igen. Som minimum skal man have registreret, at sprogbrugen ændrer sig. I det første eksempel betegnede en skabelon et pædagogisk virkemiddel, og her til sidst betegner det en mental struktur i vore hoveder. Det er derfor, der i overskriften til artiklen benyttes betegnelsen *"mentale skabeloner"*.

Planen

Her i foråret 2015 fik jeg et vikariat på Grønland, hvor jeg skulle overtage tre matematik C hold fra februar til sommereksamen. Jeg gik ud fra, at der simpelthen ikke var tænkt i at opbygge en solid forforståelse. Sådan er det tit i Danmark, så hvorfor ikke også i Grønland. Men der er ingen vej uden om – forforståelse skal der til. Da tiden var ved at være knap, valgte jeg at bruge en 3 – 4 klokketimer på at træne følgende:

- udregne simple udtryk med tal. Herunder træning i at bruge lommeregner
- regne med bogstaver
- løse simple 1. grads ligninger

Jeg ville med andre ord opbygge og træne disse tre skabeloner hos eleverne vel vidende, at disse tre ting får man ikke lært med eet. Metoden var simpel: Masser af små relativt nemme opgaver krydret med diverse små historier som fx, at bogstaver blot er tal, som vi dog ikke kender, for at give en mere sammenhængende forståelse. Og så opfordrede jeg på det kraftigste eleverne til at tage noter. Bare skriv. Det er i mine øjne et af de bedste virkemidler til at opøve denne forforståelse hos matematiksvage elever, men det skal være relativt nemme opgaver, så eleverne får lyst til matematik. Mit motto er: *"Gennem hånden ind i ånden"*.

Derefter repeterede vi ligningen for den rette linje. Lige på og hårdt:

- ligningen for en ret linje
- eksempler
- aflæse a og b af konkrete ligninger. Og igen træne bogstaver
- udregne en masse støttepunkter. Og igen træne simple udtryk
- givet y. Bestem x. Derved får man en ligning, og man får igen trænet løsning af ligninger
- osv.

Nogen undrer sig måske over, at jeg ikke tager udgangspunkt i et eksempel, som fx kørsel med taxi. Men de grønlandske elever viste sig at have svært ved matematik. Desuden havde mange svært ved det danske sprog, og så er der lang vej fra at køre taxi til, at der pludselig står $y = ax + b$ på tavlen. Så er det simpelthen nemmere blot at sige, at $y = ax + b$ er ligningen for en ret linje. Taxi–eksemplet inddrog jeg senere.

Næste emne var eksponentielle udviklinger, som er lidt svært pga. ligheden med lineære funktioner. Men her brugte jeg lyde og håndbevægelser for at illustrerer grafen: En voksende eksponentiel udvikling illustreres ved at bevæge venstre hånd langs grafen samtidig med man fløjter en voksende tone, og modsat med en eksponentiel aftagende funktion. Men ellers er der mange lighedspunkter såsom støttepunkter, skæring med y–akse osv. Der er ikke noget som gensyn. Det ligger ligesom i disse skabeloner, og det skal selvfølgelig udnyttes. Og nu var eleverne efterhånden så positive, at de tog logaritmer i stiv arm.

Det videre forløb

Det var starten, men hvad så videre frem? Ja, efterhånden fik jeg lidt mere indsigt i de grønlandske elever:

- de er venlige og imødekommende
- de gør nogenlunde, hvad man beder dem om
- de arbejder omhyggeligt, når der eksempelvis skal afsættes punkter i et koordinatsystem
- de har ikke noget imod gentagelser, og protesterer ikke over at gøre tilsyneladende trivielle ting.

Dette er alt sammen en stor fordel, når der skal læres matematik, men der er da også problemer. Mange grønlandske elever er ret svage i matematik, men mit største problem var et enormt fravær. Jeg manglede altid mellem 20 – 50 % af eleverne, hvilket er ødelæggende for enhver form for planlægning. Og det er meget svært at ændre på deres afslappede forhold til fravær som enkeltlærer.

Her må man tænke på, at deres forhold til fravær også kan opfattes som en generel mental skabelon. Det er med andre ord et tankesæt, som eleverne følger helt ureflekteret. Selvom det er ødelæggende for dem selv og deres skolegang fortsatte de alligevel med at have et stort fravær. Og de gjorde det med fuld overbevisning. Mødte jeg eksempelvis en elev kl. 10 og spurgte, hvorfor vedkommende ikke havde været der, kiggede eleven altid forundret på mig og sagde: *"Jamen, jeg sov over mig"*. Mine danske elever er altid ved at kravle ned i et musehul, når man på den måde konfronterer dem. Og de mest hårdkogte siger: *"Ja, jeg sov over mig"* med en beklagende mine. De grønlands elever beklager ikke engang. De kiggede blot undrende på mig. Hvorfor spørger du om det?

Hvordan lærer eleverne matematik under disse vilkår? Ja, her var gode råd dyre, men jeg fandt hurtigt ud af at udnytte de positive sider som nævnt ovenfor. Disse kan også opfattes som generelle skabeloner. Det er med andre ord tankesæt, som eleverne følger helt ureflekteret, og det udnyttede jeg selvfølgelig. I timerne masser af simple opgaver. Og de skulle op på tavlen. På den måde kom alle til tavlen indtil flere gange i løbet af et modul. Og afleveringsopgaver fik de i rå mængder. Bogens opgaver var alt for svære, så jeg måtte selv i gang. Jeg opdelte simpelthen traditionelle opgaver i mindre delopgaver, så de var nemmere at gå til. Stilladsering, som sprogfagene kalder det. På den måde fik jeg aktiveret alle, og de kunne arbejde selv. Der var aldrig ret mange, så der var plads til individuel hjælp. Det er i tillæg meget fleksibelt at regne afleveringsopgaver, så det ikke var så generende, at eleverne kom og gik efter forgodtbefindende. Heldigvis var opgaverne ret nemme at rette pga. de mange små delopgaver. Det værste var sådan set at finde på nye opgaver og få dem lavet.

Introduktion til differentialregning

Men lad os nu vende blikket væk fra Grønland til et helt andet eksempel, nemlig introduktion til differentialregning, som ikke falder alle elever lige let. Følger man en faglig plan vil man ofte tage udgangspunkt i tre–trinsreglen. Det gør i hvert fald de fleste lærerbøger, men følger man nu tankegangen i disse mentale skabeloner, er der også en anden mulighed, nemlig at lære eleverne at differentiere inden man præsenterer dem for tre–trinsreglen. Det har jeg haft held med flere gange bl.a. med følgende fremgangsmåde: Først tegne tangenter for $f(x) = x^2$, finde hældningen af disse tangenter, indsætte dem i et skema, heraf indse at $f'(x) = 2x$. Det samme gør vi så også for $f(x) = x$ og for $f(x) = k$. Nu har eleverne faktisk rimelig let ved at lære at differentiere to funktioner lagt samme og en konstant gange en funktion. Dermed er vi i stand til at differentiere andengradspolynomier uden at ane noget om sekanter og lignende.

Så er vi ellers parate til at regne os frem til $f'(x)$ i stedet for at tegne og gætte. Mange lærerbøger benytter den såkaldte tretrinsregel, men den formulering er jeg kritisk over for. I stedet tegner vi en skitse af grafen, indtegner de to punkter med førstekoordinaterne x_0 og $x_0 + h$, indtegner sekanten og finder hældningen af sekanten vha. formlen

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Denne formel kender alle. Desuden giver det en geometrisk fornemmelse for hvad der sker. For os, der kender matematikken, er forskellen banal, men for en nybegynder er det sandelig ikke ligegyldigt. Faktisk tror jeg, at tretrinsreglen for mange elever står som noget forunderligt, der pludselig dukker op.

Konkret og generel kommunikation

Så kan man undre sig over, hvorfor det pludselig er bedre at tegne en sekant end at benytte tre–trinsreglen. Faktisk har jeg fundet en lignende problemstilling i forbindelse med omformningsreglerne til løsning af ligninger. Man kan *”flytte over”* eller *”gøre det samme på begge sider af lighedstegnet”*, som kan illustreres med en gammeldags vægt. Det er i mine øjne en fantastisk illustration, fordi den både fortæller hvad man må, og giver en forklaring. Det gør formuleringen ”flytte over” ikke. For mange elever bliver det derfor til noget ad hoc indført uden sammenhæng med ligningsløsning i øvrigt, selvom det for en trænet matematiker selvfølgelig er ligegyldigt, om man formulerer sig på den ene eller den anden måde.

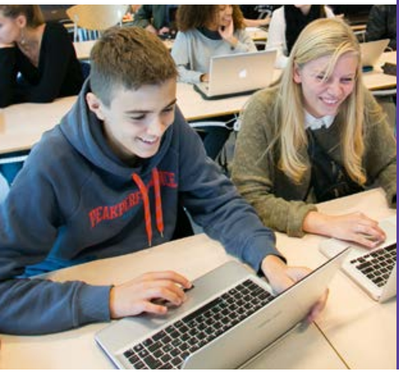
Men det er nu en sjov forskel i forklaringskraft. Man kan sammenligne det med at skulle anvise en rute fra *A* til *B*. Man kan give en rutevejledning, som denne: ”Kør 2,5 km ad Søren Frichs Vej, drej til venstre og følg Viby Ringvej osv. ...” En helt anden måde er at tegne et kort med ruten.

Rutevejledningen er nem at forstå, men der skal ikke mere end et lille vejarbejde til for at det kan gå galt. Men hvad så med kortet? Ja, det er en helt anden måde at kommunikere på. Man tegner og fortæller, og sjovt nok giver det en helt anden forståelse og et helt andet overblik fx i tilfælde af vejarbejde.

Det er nemmere at forstå de to kommunikationsformer, hvis man inddrager disse skabeloner, som der er to typer af: *Konkrete* og *generelle*. De er begge lige vigtige, thi man starter med at lære de konkrete og efterhånden kan man så udbygge med mere generelle skabeloner. Men altså først en bund af konkrete skabeloner. Og hvordan gør man så det? Jo, heldigvis formidles konkrete skabeloner ved simpelthen at fortælle eller vise, hvad man gør. Dette kan man også kalde for en konkret tilgang.

I modsætning hertil formidles generelle skabeloner ikke ved en sådan direkte meddelelse, men langt lettere ved eksempler, metaforer, tegninger og lignende. På Grønland brugte jeg eksempelvis

Mentale skabeloner	Formidling	Kommunikation
Konkrete	Mesterlære, dvs. gør som jeg siger og gør Let at formidle verbalt og på skrift	Konkret
Generelle	Ikke mesterlære, men derimod: – eksempler – metaforer – tegninger – osv. Svært at formidle verbalt og på skrift	Generel I andre artikler har jeg brugt betegnelsen ”kvalitativ”



en håndbevægelse og et fløjt som symbol på grafen for en eksponentiel udvikling. Man kan selvfølgelig også kommunikere det ved simpelthen at sige det, men det kræver en del matematisk forforståelse hos eleverne. Man siger eksempelvis: *"Grafen er buet og skærer aldrig x–aksen"*. Men en graf kan bue på mange måde, og hvad er *x*–aksen nu lige for en af akserne? Det kræver simpelthen nogle forkundskaber i matematik. Det gør en håndbevægelse og et fløjt ikke. Det er en ret afgørende forskel på de to måder at formidle på, som jeg her har fremstillet i et skema, se forrige side.

Som underviser er det en forskel, der er vigtig at være opmærksom på, thi forsøger man at formidle generelle indsigter vha. almindelig tale løber man meget let ind i en faglig bariere eller ligefrem blokering, som hindrer denne forståelse. Det betyder, at det kun er de elever, der i forvejen fagligt er godt med, der forstår, hvad der bliver sagt. Man risikerer altså at øge de faglige forskelle mellem eleverne, hvis man undlader at benytte det der i skemaet benævnes for generelle metoder.

Kort fortalt kan man altså kommunikere matematik på to måder, som begge er lige vigtige for at formidle en matematisk forståelse. Forholdet mellem de to former afhænger af situationen. Eksempelvis brugte jeg flere konkrete og specifikke udmeldinger på Grønland, end jeg normalt gør i Danmark, fordi de grønlandske elever ikke har den samme forhåndsviden om matematik. Desuden har en del af dem også svært ved det danske sprog. Mere abstrakte og generelle sammenhænge forsøgte jeg at formidle med tegn, lyde osv. Jeg undgik lange og mere abstrakte forklaringer fordi disse simpelthen faldt til jorden.

Nu kunne man oplagt spørge om der også er to kommunikationsformer på spil i forbindelse med formidling af fysik og kemi? Men det vil jeg selvfølgelig mene, at der er, men det er meget mere integreret i fagene, end det er i matematik i kraft af forsøg, demonstrationsforsøg og en tradition for at tegne og fortælle. Selvfølgelig tegner vi grafer i matematik, men alligevel skulle vi måske dyrke de kvalitative sider lidt mere.

Man kan læse mere om den her præsenterede læringsteori på adressen: www.skolekom.dk/~ole.andersen@skolekom.dk/