Kædebrøker til praktiske beregninger anno 1805

Ellen Stengaard Munkholm, lektor emerita

Carl Ferdinand Degen (1766–1826), den første matematiker ansat ved Odense Katedralskole (1802–06), rektor for Viborg Katedralskole (1806–14) og professor i matematik ved Københavns Universitet (1814–26), skrev i anledning af højtideligholdelsen af kongens fødselsdag 1805 ved Odense Katedralskole et lille skrift, *"Om Nytten af den fortløbende Brøk"*. Jeg benytter i denne artikel det almindelig kendte ord kædebrøk i stedet for fortløbende brøk. I indledningen skriver han

> "At de mathematiske Kundskaber, som meddeles de høyere Klasser her i Skolen, og, in specie [1)], de fra det Elementaire noget afvigende, i Skolens 3die videnskabelige Klasse foredragne, *Theorier*, have deres udmærkede *praktiske Nytte*, derom er det min Pligt, saavidt muligt, at overbevise de Fædre, som maatte finde nærværende lidet Skrift deres Opmærksomhed værdigt."

I 1805 skulle alle beregninger foretages ved håndkraft. Hvis man var heldig, havde man måske en logaritmetabel til rådighed. Degen benytter følgende som optakt/argument for skriftet

> "Da Multiplikation og Division med store Tællere og Nævnere altid gjør Regningen vidtløftigere, søger man, saa meget som muligt, at udtrykke en Brøk med smaa tal. Have nu Tælleren og Nævneren en *fælles Divisor*, saa divideres begge dermed, og Brøken kaldes *forkortet* eller *reduceret*. Men denne Forkortning eller reduktion lader sig ej altid iværksætte…..
> At tvende Brøk ere ligestore kjendes derpaa, at Multiplication over Kors giver ligemeget. …Giver Multiplication over Kors omtrent ligemeget, ere også Brøkene omtrent lige store."

Han sammenligner så $\frac{729}{1000}$ og $\frac{269}{369}$. Her er forskellen 1, når der ganges over kors, altså forskellen er så lille som mulig. For brøkerne $\frac{87277}{111987}$ og $\frac{551}{707}$ bliver forskellen 2, når der ganges over kors, så disse to brøker kan approksimativt benyttes i stedet for hinanden. Han stiller så spørgsmålet.

> "Hvorledes findes saadanne Brøk, som komme andre, givne Brøk saa nær, og i Tilfælde, at der ej kræves den yderste Nøiagtighed, kunne bruges istædet for samme?"

Nu gengiver jeg et eksempel fra Degens artikel i en lidt omskreven form. Brøken $\frac{25}{36}=\frac{5}{7\frac{1}{5}}$ og $\frac{25}{36}=\frac{2\frac{1}{12}}{3}$. Hvis man nu smider brøken i henholdsvis nævner og tæller væk, får man $\frac{5}{7}$ og $\frac{2}{3}$. Da $\frac{25}{36}-\frac{5}{7}=\frac{5}{252}$ og $\frac{25}{36}-\frac{2}{3}=\frac{1}{36}$ kan man i stedet for $\frac{25}{36}$ tilnærmelsesvis benytte en af de to simplere brøker $\frac{5}{7}$ og $\frac{2}{3}$.

Herefter går han over til at bestemme simplere brøker, der nærmer sig $\frac{25}{36}$ mere og mere. Idéen er, at brøker hele tiden skal have 1 som tæller.

Da $\frac{25}{36}=\frac{1}{\frac{36}{25}}=\frac{1}{1+\frac{11}{25}}$, $\frac{11}{25}=\frac{1}{2+\frac{3}{11}}$, $\frac{3}{11}=\frac{1}{3+\frac{2}{3}}$ og $\frac{2}{3}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}$ kan $\frac{25}{36}$ skrives som en endelig kædebrøk

$$\frac{25}{36}=\frac{1}{1+\frac{11}{25}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\frac{3}{11}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\frac{2}{3}}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}} \qquad (1)$$

Hvis man successivt kun medtager heltalsdelen i nævnerne i (1) fås tallene/brøkerne

$$\frac{1}{1}=1,\quad \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}=\frac{2}{3},\quad \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}=\frac{7}{10} \text{ og } \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1}}}}=\frac{9}{13} \qquad (2)$$

Da $\frac{25}{36}-1=-\frac{9}{36}$, $\frac{25}{36}-\frac{2}{3}=\frac{1}{36}$, $\frac{25}{36}-\frac{7}{10}=-\frac{2}{360}$ og $\frac{25}{36}-\frac{9}{13}=\frac{1}{468}$ ses, at de fire brøker (2) alle er approksimatio-

[1)] Et ældre ord for regningsarter.

ner til $\frac{25}{36}$ og jo mere af kædebrøken man tager med jo bedre er approksimationen af $\frac{25}{36}$.

Nu siger Degen så:

> ”Men denne Metode vilde, især for Uøvede, være for besværlig og vidtløftig. Jeg vil derfor fremsætte en praktisk regel, som enhver med simple Kundskaber i Regnekunsten let kan følge.”

Først benyttes Euklids algoritme til at finde største fælles divisor i 25 og 36

```
25)36(1
   25
   11)25(2
      22
      3) 11(3
          9
          2)3(1
            2
            1)2(2
              2
              0
```

Her forekommer kvotienterne

1, 2, 3, 1 og 2 (3)

og disse tal genfinder man som heltalsdelen af de successive nævnere i udtrykket (1). Det er let at vise, at det er en generel regel, at man ved de to metoder får de samme tal.

Degen giver så en regel for, hvordan man kan bestemme brøkerne i (2). Min fremstilling her adskiller sig kun fra Degens ved, at han udelukkende benytter sig af ord, hvorimod jeg benytter nogle få symboler. Hvis Euklids algoritme resulterer i n kvotienter dannes en tabel (a_{ij}), $(i = 1, \ldots , n + 3, j = 1, \ldots , 4)$, hvor første række består af overskrifterne kvotient, T (tæller) og N (nævner), $a_{i+2,1} =$ i'te kvotient fra Euklids algoritme, $a_{22} = a_{33} = 1$, $a_{23} = a_{32} = 0$ og $a_{ij} = a_{i-2\,j} + a_{i-1\,j} \cdot a_{i-1\,1}$ for $i = 3, \ldots , n + 3$ og $j = 2$ og $j = 3$. Dette giver følgende tabel

Kvotient	T	N	
	1	0	
1	0	1	M
2	1	1	S
3	2	3	M
1	7	10	S
2	9	13	M
	25	36	

Ud fra tabellen dannes brøkerne $\frac{a_{i2}}{a_{i3}}$ $(i = 3, \ldots , n + 3)$, i dette tilfælde fås tallene $\frac{0}{1} = 0$, $\frac{1}{1} = 1$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{9}{13}$ og $\frac{25}{36}$. Det ses, at disse er de samme brøker som (2). Disse brøker er skiftevis større og mindre end $\frac{25}{36}$, hvilket Degen har angivet ved henholdsvis et S og et M i 4. søjle. Det gælder også generelt, at man skiftevis får brøker, der er for små og for store.

Som et praktisk eksempel sammenligner Degen engelske og franske fod, idet 3379 franske fod svarer til 3600 engelske fod. Ved at benytte ovenstående metode fås følgende tabel

Kvotient	T	N	
	1	0	
1	0	1	M
15	1	1	S
3	15	16	M
2	46	49	S
4	107	114	M
1	474	505	S
5	581	619	M
	3379	3600	

Denne tabel fortæller så, afhængig af, hvor præcis en oversættelse man ønsker mellem franske og engelske fod, at 15 franske fod svarer til 16 engelske fod, hvilket et Hamburg kontor åbenbart benyttede, eller 46 franske fod svarer til 49 engelske fod, eller endnu bedre 581 franske fod svarer til 619 engelske fod. Degen beregner også, hvor store fejl man begår ved at benytte de forskellige omsætninger.

Metoden benyttes også til en situation fra fysik, hvor man ser på en sten, der kastes ned i en brønd, hvis dybde man ikke kender. Her argumenterer han for formlen

$$x = \frac{h}{2g}\left(h + 2gt - \sqrt{h^2 + 4htg}\right)$$

hvor

> ”det Rum, som et frit faldende Legeme gjennemløber i den første Sekund = g, det Rum, som Lyden gjennemløber i een Sekund = h, Tiden, som forløber imellem det Øjeblik, da Stenen begynder at falde til det Øjeblik, da lyden høres = t og Brøndens Dybde = x.”

Her er g og h kendte størrelser, og t kan måles. Men det at beregne kvadratrødder er besværligt, så det vil han gerne undgå.

> ”Man sætte Tiden af Lydens Stigen = z saa er Tiden af Faldet $= t - z$.”

Af $x = hz = g(t-z)^2$ og $u = t - z$ fås

$$gu^2 + hu = ht \quad \text{eller} \quad u^2 + \frac{h}{g}u = \frac{h}{g}t$$

Sættes $m = \frac{h}{g}$ fås $u^2 + mu = mt$ eller $u(u+m) = mt$, hvorfor

$$u = \frac{mt}{m+u} = \frac{mt}{m + \frac{mt}{m+u}} = \frac{mt}{m + \frac{mt}{m + \frac{mt}{m+u}}} = \frac{mt}{m + \frac{mt}{m + \frac{mt}{m + \frac{mt}{m + \frac{mt}{m+u}}}}}$$

Her kan man jo blive ved med at erstatte u med $\frac{mt}{m+u}$ og således få en uendelig kædebrøk. Hvis man så i denne forkorter med mt fås

$$u = \cfrac{1}{\cfrac{1}{t} + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{\cfrac{1}{t} + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{\cfrac{1}{t} + \dots}}}}}$$

Her ses det, at faldtiden u kan skrives som en kædebrøk, hvor kvotienterne skifter mellem $\frac{1}{t}$ og m. Dette giver anledning til følgende tabel.

Kvotient	T	N
	1	0
$\frac{1}{t}$	0	1
m	1	$\frac{1}{t}$
$\frac{1}{t}$	m	$\frac{m}{t}+1$
m	$\frac{m}{t}+1$	$\frac{m}{t^2}+\frac{2}{t}$
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Heraf kan han så bestemme følgende approksimation

$$u = \frac{\frac{m}{t}+1}{\frac{m}{t^2}+\frac{2}{t}} = \frac{mt+t^2}{m+2t}$$

hvorefter han som approksimation for dybden får $x = \frac{ht^2}{m+2t}$.

I efterskriftet skriver Degen:

> ”De her valgte Exempler kunne være tilstrækkelige til at vise Nytten af en med Brøkerne foretagen Forandring, der, ved at give dem den i den almindelige Regnekonst ubekjendte Form af en trappeviis nedstigende Brøk Række, ved første Øjekast kunne synes at være en blot spekulativ Kuriositet; altsaa og til at overbevise de Fædre eller Formyndere, hvis Børn eller Myndlinge tage Deel i Skolens Underviisning, at endog Meddelelsen af de efter Anseende meest spekulative Kundskaber, ifølge Regjeringens vise Plan, er beregnet paa sand, praktisk Brugbarhed, paa gavnlig Anvendelse i det borgerlige Livs Virkekreds.”

Henvisning

C. F. Degen: *Om Nytten af den fortløbende Brøk*, Udgivet som et Indbydelsesskrift til de Høytideligheder, hvormed Hs. Kgl. Majestæts høye Fødselsdagsfest helligholdes næstkommende 29de Januari i Gymnasiets større Høresal, Odense 1805. Kan ses på det Kongelige Bibliotek.

Svar på spørgsmål

Svar på spørgsmål om andengradsligningen, LMFK–bladet 2/2015 side 15.

Problemet opstår på grund af en logisk fejl i løsning 2. Det handler om fælden med falske løsninger.

Det er rigtigt, at hvis a og b er rødder i , så er . Med det modsatte behøver ikke være tilfældet. De ønskede værdier af a og b skal derfor søges blandt løsningerne til sidstnævnte ligning, men det er ikke givet, at alle disse løsninger kan bruges.

Hans Mårtensson, Nyborg Gymnasium