Bedste cirkel gennem punkter i planen

Michael Jørgensen, Midtsjællands Gymnasieskoler

Vi har tidligere her i bladet set artikler om lineær regression, dvs. bestemmelse af bedste rette linje gennem punkter i planen. I denne artikel vil jeg betragte et andet problem, nemlig bestemmelse af bedste cirkel gennem punkter i planen.

Baggrunden for dette problem er et studieretningsprojekt (i fysik og matematik), hvor eleven skulle gentage Keplers beregninger af Mars' bane. Her bestemmer man netop koordinaterne for Mars' position til mange forskellige tidspunkter, og så forsøger man at bestemme centrum og radius for Mars' bane. Eleven gjorde det grafisk, men jeg vil vise en analytisk løsning.

Givet n punkter med koordinaterne (x_i, y_i), ønsker vi således at bestemme centrum (X_0, Y_0) og radius R for den cirkel, som "bedst" går gennem punkterne.

Vi ønsker med andre ord at finde den "bedste" løsning til følgende over–determinerede ligningssystem:

$$\left(x_i - X_0\right)^2 + \left(y_i - Y_0\right)^2 = R^2, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

I det følgende vil jeg udlede simple formler for løsningen til dette problem. Først omskrives ligningssystemet til følgende:

$$2\, x_i\, X_0 + 2\, y_i\, Y_0 + Z_0 = x_i^2 + y_i^2$$

hvor $Z_0 = R^2 - X_0^2 - Y_0^2$.

Vi har således et over–determineret ligningssystem, som er lineært i de tre ubekendte X_0, Y_0 og Z_0. Når de er fundet, så kan radius R nemt findes som $R^2 = Z_0 + X_0^2 + Y_0^2$. Dette ligningssystem kan skrives på matrixform som

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$$

hvor matricen $\boldsymbol{A}$ har størrelsen ($n \times 3$) og er givet ved

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2y_1 & 1 \\ 2x_2 & 2y_2 & 1 \\ 2x_3 & 2y_3 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 2x_n & 2y_n & 1 \end{bmatrix}$$

og matricen $\boldsymbol{B}$ har størrelsen ($n \times 1$) og er givet ved

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} x_1^2 + y_1^2 \\ x_2^2 + y_2^2 \\ x_3^2 + y_3^2 \\ \dots \\ x_n^2 + y_n^2 \end{bmatrix}$$

Endelig er matricen $\boldsymbol{X}$ med størrelsen (3×1) givet ved

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}$$

Det er velkendt fra lineær algebra, at den "bedste" løsning (ifølge mindste kvadraters metode) opnås ved at multiplicere fra venstre med den transponerede matrix:

$$\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{B}$$

Nu udregnes de to matrixprodukter, og svaret kan umiddelbart skrives op:

$$\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 \cdot \Sigma(x_i^2) & 4 \cdot \Sigma(x_i \cdot y_i) & 2 \cdot \Sigma(x_i) \\ 4 \cdot \Sigma(x_i \cdot y_i) & 4 \cdot \Sigma(y_i^2) & 2 \cdot \Sigma(y_i) \\ 2 \cdot \Sigma(x_i) & 2 \cdot \Sigma(y_i) & n \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^T \cdot \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 \cdot \Sigma(x_i \cdot (x_i^2 + y_i^2)) \\ 2 \cdot \Sigma(y_i \cdot (x_i^2 + y_i^2)) \\ \Sigma(x_i^2 + y_i^2) \end{bmatrix}$$

Nu er problemet reduceret til løsning af et lineært ligningssystem bestående af tre ligninger med tre ubekendte. Skrevet fuldt ud bliver det til:

$$4 \cdot E\left[x^2\right] \cdot X_0 + 4 \cdot E\left[x \cdot y\right] \cdot Y_0 + 2 \cdot E\left[x\right] \cdot Z_0 = 2 \cdot E\left[x \cdot \left(x^2 + y^2\right)\right]$$

$$4 \cdot E\left[x \cdot y\right] \cdot X_0 + 4 \cdot E\left[y^2\right] \cdot Y_0 + 2 \cdot E\left[y\right] \cdot Z_0 = 2 \cdot E\left[y \cdot \left(x^2 + y^2\right)\right]$$

$$2 \cdot E\left[x\right] \cdot X_0 + 2 \cdot E\left[y\right] \cdot Y_0 + Z_0 = E\left[x^2 + y^2\right]$$

hvor jeg har indført betegnelsen $E[x] = 1/n \cdot \sum[x_i]$, osv. I daglig tale er $E[x]$ gennemsnittet af x.

Ved at gange den sidste ligning med henholdsvis $E[x]$ og $E[y]$ og trække den fra henholdsvis den første og den anden ligning, så ender vi med følgende to ligninger til at bestemme X_0 og Y_0:

$$2 \cdot V\left(x\right) \cdot X_0 + 2 \cdot C\left(x, y\right) \cdot Y_0 = C\left(x, x^2 + y^2\right)$$

$$2 \cdot C\left(x, y\right) \cdot X_0 + 2 \cdot V\left(y\right) \cdot Y_0 = C\left(y, x^2 + y^2\right)$$

hvor jeg har indført betegnelserne $V(A) = E[A^2] - E[A]^2$ og $C(A, B) = E[A \cdot B] - E[A] \cdot E[B]$. I daglig tale er $V(A)$ variansen af A, og $C(A, B)$ er kovariansen af A og B.

Dette ligningssystem løses på sædvanlig vis, og svaret kan skrives som:

$$X_0 = \frac{V(y)\cdot C\left(x, x^2+y^2\right) - C(x,y)\cdot C\left(y, x^2+y^2\right)}{2\cdot\left(V(x)\cdot V(y) - C(x,y)^2\right)}$$

$$Y_0 = \frac{V(x)\cdot C\left(y, x^2+y^2\right) - C(x,y)\cdot C\left(x, x^2+y^2\right)}{2\cdot\left(V(x)\cdot V(y) - C(x,y)^2\right)}$$

Til sidst finder vi for radius af cirklen, at den er givet ved:

$$R^2 = V(x) + V(y) + \left(E[x] - X_0\right)^2 + \left(E[y] - Y_0\right)^2$$

Jeg har således udledt nogle simple formler til bestemmelse af centrum og radius af en cirkel gennem mange punkter.

Eksempel – Bestemmelse af parametrene for Marsbanen

Fra Kepler's originale data[1)] har jeg beregnet (ved at antage, at Jorden følger en cirkelbane med centrum i Solen) følgende positioner af Mars (i astronomiske enheder) til forskellige tidspunkter:

Datoer	x	y
17. feb 1585 og 5. jan 1587	–1,4530	0,8655
19. sep 1591 og 6. aug 1593	1,1957	–0,6869
7. dec 1593 og 25. okt 1595	1,0739	1,0511
28. mar 1587 og 12. feb 1589	–1,6323	–0,1485
10. mar 1585 og 26. jan 1587	–1,5538	0,6249

Ved at benytte ovenstående metode kommer jeg frem til følgende mellemregninger:

$E[x]$	= –0,4739
$E[y]$	= 0,3412
$V[x]$	= 1,7299
$V[y]$	= 0,4312
$C(x, y)$	= –0,1740
$C(x, x^2 + y^2)$	= –0,4543
$C(y, x^2 + y^2)$	= 0,1255

Jeg finder så, at centrum er placeret i (X_0, Y_0) = (–0,1216; 0,0965) og radius er R = 1,5314.

I virkeligheden – ifølge Kepler – er banen en ellipse, men det er en god approksimation at betragte ellipsen som en forskudt cirkel. Excentriciteten kan så estimeres som forholdet mellem centrums afstand til origo og radius i cirklen; jeg får værdien e = 0,1014. De officielt accepterede værdier for radius (halve storakse) og excentricitet er henholdsvis a = 1,5237 og e = 0,0934. Metoden virker altså ganske tilfredsstillende.

[1)] Owen Gingerich, *Laboratory Exercises in Astronomy – The Orbit of Mars*, Sky & Telescope, side 300 – 302.