

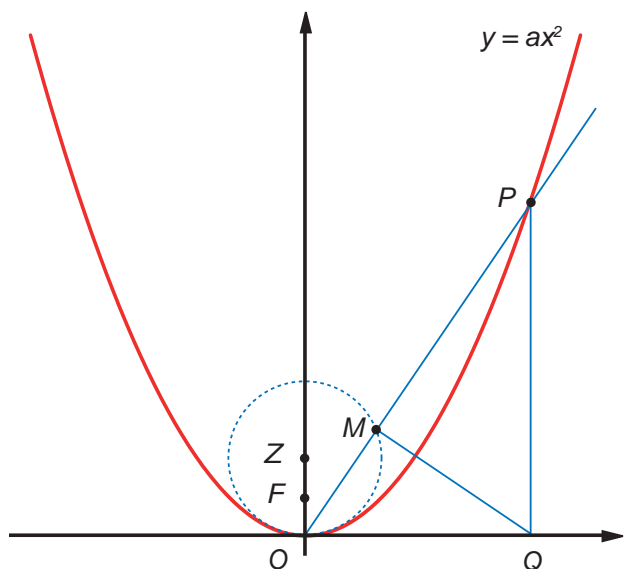
Et par geometriske steder ved parabeln

Jens Carstensen, Tårnby Gymnasium & Alija Muminagić, Nykøbing F.

Vi skal se på et par mindre kendte geometriske steder med tilknytning til parabeln.

1. geometriske sted

Parabeln med ligningen $y = ax^2$ har som bekendt brændpunkt i $F = (0, \frac{1}{4a})$. Lad nu punktet $P = (k, ak^2)$ være et vilkårligt punkt på parabeln. Projektionen af P på x -aksen er $Q = (k, 0)$. Punktet Q projiceres på linjen OP i M . Vi finder det geometriske sted for M , når P gennemløber parabeln.



OP har ligningen

$$y = akx \quad (1)$$

og QM har ligningen

$$y = -\frac{1}{ak}(x-k) \quad (2)$$

Af (2) fås

$$aky = -x + k \Leftrightarrow k(ay - 1) = -x \Leftrightarrow k = \frac{x}{1-ay}$$

Af (1) fås $k = \frac{y}{ax}$ og dermed er

$$\begin{aligned} \frac{y}{ax} = \frac{x}{1-ay} &\Leftrightarrow a(x^2 + y^2) - y = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{1}{a}y = 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2a}\right)^2 &= \frac{1}{4a^2}. \end{aligned}$$

Derfor bevæger M sig på en cirkel med centrum i $Z = (0, \frac{1}{2a})$ og radius $\frac{1}{2a}$. Cirklen tangerer x -aksen i $(0, 0)$ og parablen's brændpunkt er midtpunkt af OZ .

Alle regninger kan vendes, så alle punkter på cirklen bortset fra punktet $(0, \frac{1}{a})$ kommer med.

2. geometriske sted

Lad der være givet en cirkel c og en tangent t til cirklen. Vi søger det geometriske sted for centrene af alle cirkler, der tangerer c udvendigt og som samtidig tangerer t .

Lad O være centrum for den givne cirkel med radius r . Tangenten t vælges som x -akse og D er røringsspunktet med t , som vælges til $(0, 0)$. Desuden går y -aksen gennem cirkelns centrum O , som får koordinaterne $(0, r)$.

Cirklen med centrum O_1 og radius $r_1 = O_1A$ opfylder betingelsen. Vi sætter det løbende punkt $O_1 = (x, y)$. Så er $O_1A = r_1 = y$ og

$$OO_1 = r + r_1 = r + y.$$

Desuden giver afstandsformlen, at

$$OO_1^2 = x^2 + (y - r)^2$$

så

$$x^2 + (y - r)^2 = (r + y)^2 \quad x^2 + y^2 + r^2 - 2ry = r^2 + y^2 + 2ry$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4ry \quad \Leftrightarrow y = \frac{1}{4r}x^2$$

Dette er ligningen for en parabel med brændpunkt i $(0, r)$, dvs. i den givne cirkels centrum.

