Længdebestemmelse for et andengradspolynomium

Thorleif Bundgaard, Eskil Simon Kanne Wadsholt, Henrik Christensen,
Teknisk Gymnasium Århus midtby

I forlængelse af de mange interessante betragtninger over andengradsligningen viser vi i det følgende udregningen af en længdeformel. Denne formel kan præsenteres for elever, der således direkte kan beregne længden af et vilkårligt stykke af en parabel. Dette åbner mulighed for at inddrage parablens form i elevopgaver på det tidspunkt i undervisningen, hvor funktionsbegrebet er sat i brug, eventuelt hvor kun de simpleste integraler er lært.

Under fremstilling af opgaver til eleverne beregner vi ofte længden af en strækning. Det være sig vejforløb eller stakitlængder. I disse indgår som regel den rette linie og cirklen ud fra det grundlag, at vi for disse to former rimelig simpelt kan beregne længden af delelementer. Det betyder dog samtidig, at vore opgaver er begrænset til lidt stereotype faconer. Meget morsommere bliver det, hvis vi kan indføje andengradspolynomiet i vore tegninger. Straks dukker flere interessante muligheder op. Skæringer imellem rette linier og parablen, osv. Dog giver det et problem, hvis vi beder om beregning af længden af et stykke af parablen.

Selve udtrykket er jo enkelt – en integration over en pythagoras $L=\int\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$, men beregningen er på ingen måde triviel og forudsætter et godt kendskab til integration.

Altså er mange elever udelukket herfra. Og opgaven kan ikke løses uden CAS-værktøj.

Vi stillede os selv spørgsmålet: "Kan man finde en enkel længdeformel for det populære andengradspolynomium?". Svaret viste sig at være ja.

Indledende generaliseringer

Vi starter med at betragte andengradspolynomiet $f(x) = ax^2$, hvortil buelængden

$$L = \int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(2ax)^2}\,dx$$

ønskes bestemt. Her benytter vi så de hyperbolske funktioner

$$\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \text{ og } \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

så integralet nu kan løses ved substitutionen

$$2ax = \sinh(2ay) \text{ og give } \frac{dx}{dy} = \cosh(2ay).$$

Da man kan udregne, at $1 + \sinh^2(z) = \cosh^2(z)$, så er det integralet

$$L = \int_{y_1}^{y_2}\cosh^2(2ay)\,dy,$$

vi betragter. Videre er

$$\cosh^2(2ay) = \frac{\cosh(4ay)}{2} + \frac{1}{2},$$

og da

$$\frac{d}{dy}\frac{\sinh(4ay)}{8a} = \frac{\cosh(4ay)}{2}$$

bliver stamfunktionen

$$\left[\frac{\sinh(4ay)}{8a} + \frac{y}{2}\right]_{y_1}^{y_2}.$$

Her skal $y_1 = \sinh^{-1}(x_1)$ og $y_2 = \sinh^{-1}(x_2)$ først udregnes og derpå indsættes. Men det ser jo ikke særligt gymnasieagtigt ud.

En forsimpling

Ved at sætte $t = e^z$ i $\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ kan vi bestemme den inverse funktion med ligningen $w = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \Leftrightarrow t^2 - 2wt - 1 = 0$.

Via løsningsformlen for andengradsligninger fås $t = w + \sqrt{w^2+1}$, idet $t = w - \sqrt{w^2+1} < 0$ er forkastet, da $t = e^z > 0$. Med andre ord er

$$\sinh^{-1}(z) = \ln(w + \sqrt{w^2+1}).$$

Da vi i det konkrete tilfælde har

$$2ay = \sinh^{-1}(2ax) = \ln(q), \text{ hvor}$$

$$q = 2ax+\sqrt{(2ax)^2+1},$$

så får vi $4ay = 2\ln(q) = \ln(q^2)$, og med det i hånden kan stamfunktionen

$$\frac{\sinh(4ay)}{8a} + \frac{y}{2}$$

reduceres og skrives som

$$\frac{q^4-1}{16aq^2} + \frac{\ln(q)}{4a}.$$

Funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$ er en parabel med toppunkt i (x_T, y_T). Den fremkommer som en flytning af $f_a(x_a) = a\,x_a^2$. Da

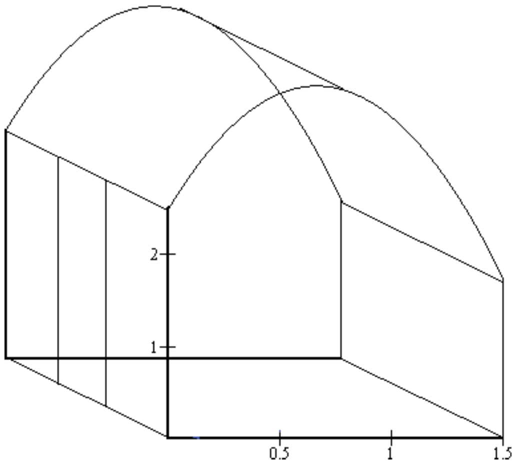
$$2a\,x_\alpha = 2a\,x + b \Rightarrow f(x) - y_T = f_a(x_a),$$

og da kurvelængden af en kurve ikke ændres ved en flytning, kan vi nu samle resultatet på følgende form:

$$L_{\text{kurve}} = \left[\frac{q^4 - 1}{16\,a\,q^2} - \frac{\ln(q)}{4\,a}\right]_{q_1}^{q_2}$$

hvor

$$q(x) = 2ax + b + \sqrt{(2ax + b)^2 + 1}.$$



Den praktiske form: parabellængden

Givet funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$ bestemmes kurvelængden, L, mellem $x_1 < x_2$ som

$$L = \frac{q_2^4 - 1}{16\,a\,q_2^2} - \frac{q_1^4 - 1}{16\,a\,q_1^2} + \frac{\ln\left(\frac{q_2}{q_1}\right)}{4\,a},$$

hvor $q_1 = q_1(x)$ og $q_2 = q_2(x)$ først udregnes vha. funktionen

$$q(x) = 2ax + b + \sqrt{(2ax + b)^2 + 1}.$$

Et regneeksempel

På et cykelskur er taget beskrevet ved funktionen

$f(x) = -3x^2 + 4x + 2{,}5$

Skurets bredde er 3 m, døråbningen 1 m bred og dybden 1,5 m. Skuret er konstrueret i gennemsigtige plastikplader. Find arealet af skurets sider og tag.

Vi regner i det følgende uden enheder, men arealer kommer naturligvis ud i m^2. Vi husker, at kurvelængden beregnes med

$$L = \int_0^{1,5} \sqrt{1 + (f\,'(x))^2}\,dx.$$

For funktionen $f(x) = ax^2 + bx + c$ har dette integral følgende generelle løsningmetode, idet kurvelængden af parablen fra x_1 til x_2 bestemmes som følger:

a) Benyt først funktionen

$q(x) = 2ax + b + \sqrt{(2ax + b)^2 + 1}$

til at udregne $q_1 = q(x_1)$ og $q_2 = q(x_2)$.

b) Herefter indsættes q_1 og q_2 i

$$L = \frac{q_2^4 - 1}{16\,a\,q_2^2} - \frac{q_1^4 - 1}{16\,a\,q_1^2} + \frac{\ln\left(\frac{q_2}{q_1}\right)}{4\,a}.$$

Opgaven beregnes

Forside og bagside fås af

$A_{for} = 2 \cdot f(0) = 5$

$A_{bag} = 3 \cdot f(1{,}5) = 5{,}25$

Sidearealet findes af integralet

$$A_{side} = \int_0^{1,5} -3x^2 + 4x + 2{,}5\;dx$$

$$= \left[-3\cdot\tfrac{1}{3}\,x^3 + 4\cdot\tfrac{1}{2}\,x^2 + 2{,}5x + k\right]_0^{1,5}$$

$$= -1{,}5^3 + 2\cdot 1{,}5^2 + 2{,}5\cdot 1{,}5 - (0)$$

$$= 4{,}875$$

Så de to sider har altså arealet 9,75.

Til taget vil vi bruge formlen

$$L = \int_0^{1,5} \sqrt{1 + (f\,'(x))^2}\,dx$$

med den opgivne funktion og finder

$q_1(0) = -6\cdot 0 + 4 + \sqrt{(-6\cdot 0 + 4)^2 + 1} = 8{,}123$

$q_2(1{,}5) = -6\cdot 1{,}5 + 4 + \sqrt{(-6\cdot 1{,}5 + 4)^2 + 1} = 0{,}099$

hvilket giver

$$L = \frac{0{,}099^4 - 1}{16\cdot(-3)\cdot 0{,}099^2} - \frac{8{,}123^4 - 1}{16\cdot(-3)\cdot 8{,}123^2} + \frac{\ln\left(\frac{0{,}099}{8{,}123}\right)}{4\cdot(-3)} = 3{,}866$$

Tagarealet er da

$A_{tag} = \text{bredde} \cdot \text{kurvelængde} = 3 \cdot 3{,}866 = 11{,}599.$

Det samlede pladeareal bliver dermed $A = 31{,}599$.

Konklusion

Det viste sig således, at vi kunne finde en generel løsningsformel til beregning af længden af et udsnit af et andengradspolynomium. Formlen kan udleveres til gymnasieelever på et relativt tidligt tidspunkt og muliggør opgavetyper med lidt mere spændende faconer. ◊