Bestemmelse af konstanterne i et andengradspolynomium

Bjarne Schmidt, Mads Clausen Instituttet,
Syddansk Universitet, Sønderborg

I forlængelse af Jens Carstensens artikel om parablens toppunkt i LMFK-bladet nr. 4, september 2009 nævnes i det følgende nogle yderligere egenskaber ved andengradspolynomiet. I forbindelse med mundtlig eksamen på A- og B-niveau kan det være formålstjenstligt at kunne løfte traditionelt 1.g-stof en smule med hensyn til graden af abstraktion, og nedenstående lille behandling af, hvorledes man ud fra en forelagt parabel kan bestemme konstanterne i et andengradspolynomium, kan måske tjene hertil. Noten er skrevet direkte til undervisningsbrug.

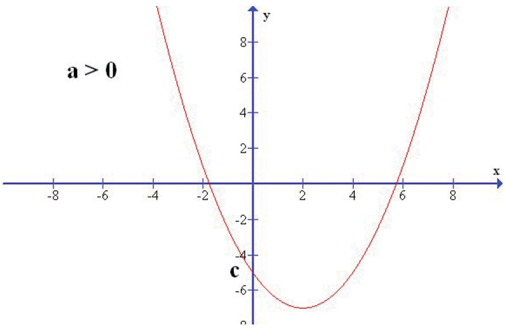
Vi betragter et andengradspolynomium

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

hvor a, b og c er konstanter og $a \neq 0$. Grafen for et andengradspolynomium er som bekendt en parabel.

Det er velkendt at konstanten c nemt kan findes ud fra en forelagt parabel, idet c er parablens skæring med y-aksen, hvilket følger af, at $f(0) = c$.

Det er også velkendt, at fortegnet for konstanten a er let at se ud fra parablen, idet $a > 0$, såfremt parabelbenene vender opad (en "glad" parabel), og $a < 0$, såfremt parabelbenene vender nedad. Størrelsen af a kan man dog ikke umiddelbart aflæse.



Det er lidt vanskeligere at sige noget om konstanten b ud fra parablen. Man kan dog ved at sammenholde sin viden om fortegnet for a med fortegnet for toppunktets førstekoordinat også afgøre fortegnet for b, men man får ikke let aflæst størrelsen af b.

Naturligvis kan man ved at aflæse et par punkter på parablen opstille et ligningssystem og ud fra dette bestemme a og b, men det kræver i hvert fald lidt papir og blyant!

I denne lille note vil vi se på, hvorledes man ad grafisk vej hurtigt kan få en bestemmelse af a og b ud fra en forelagt parabel.

Sætning 1

For et andengradspolynomium er konstanten b lig med hældningen for tangenten i punktet $(0, c)$.

Bevis

Vi differentierer først vort andengradspolynomium:

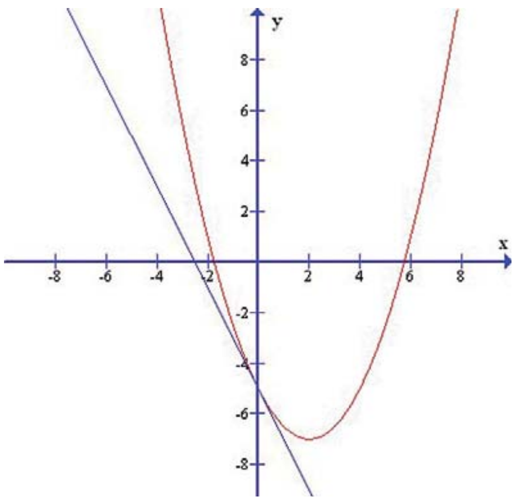
$$f'(x) = 2ax + b$$

Da diffentialkvotienten netop angiver tangentens hældning, har vi heraf, at $f'(0) = b$, og hermed er det ønskede bevist.

Eksempel 1

På parablen herunder kan vi hurtigt se, at tangenthældningen er negativ i det punkt, hvor parablen skærer y-aksen, dermed er b også negativ.

Vi kan eventuelt indtegne tangenten og aflæse hældningen. Vi får her hældningen til -2, altså er $b = -2$. Ved simpel aflæsning kan man således bestemme b.

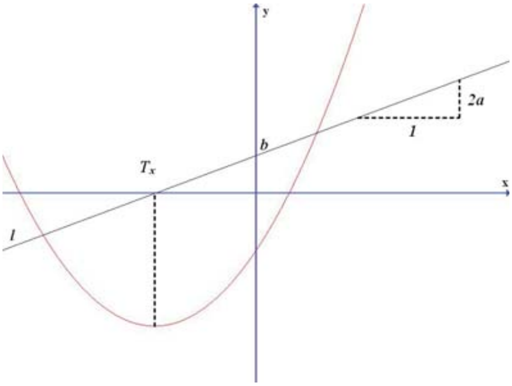


Sætning 2

Lad $f(x) = ax^2 + bx + c$ være et andengradspolynomium, og lad l betegne den linje, der går gennem (0, b) og punktet T_x, der er det punkt på x-aksen, som har samme x-koordinat som parablens toppunkt. Så er l's hældning lig med $2a$.

Bevis

Vi viser, at linjen l er grafen for den afledede funktion $f'(x)$.



Grafen for $f'(x)$ går ifølge beviset for sætning 1 igennem (0, b). Samtidig må $f'(x)$ have værdien 0 i den x-værdi, hvor parablen har sit toppunkt, for her har parablens tangent jo netop hældningen 0. Altså går grafen for $f'(x)$ også igennem T_x. Da $f'(x)$ er en lineær funktion, er grafen netop linjen l.

Da $f'(x) = 2ax + b$, ser vi, at hældningen for linjen l er lig med $2a$ som ønsket.

Bemærkning 1

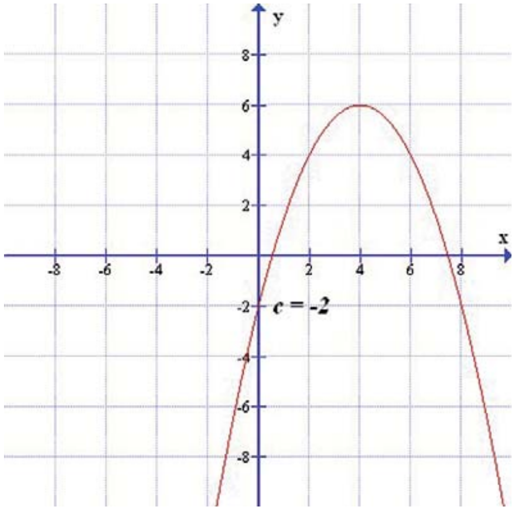
Hvis vi – for eksempel ved hjælp af sætning 1 – kender b, så kan vi nu hurtigt tegne linjen l og ud fra denne bestemme konstanten a.

Bemærkning 2

At linjen l svarer til grafen for $f'(x)$ stemmer også fint med vores viden om, at fortegnet for $f'(x)$ angiver den oprindelige funktions monotoniintervaller. Linjen skærer x-aksen ved den x-værdi hvor $f(x)$ har sit ekstremum, og linjen ligger under x-aksen i det interval, hvor $f(x)$ er aftagende, og linjen ligger over x-aksen i det interval, hvor $f(x)$ er voksende.

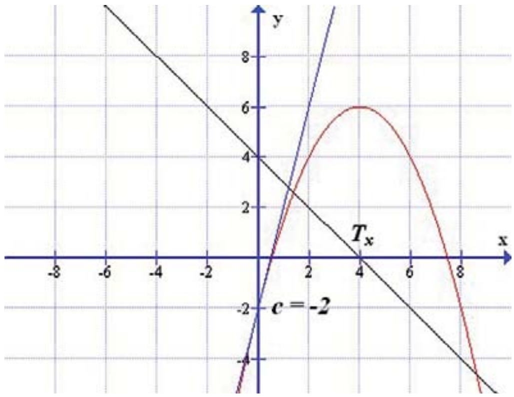
Eksempel 2

Vi vil finde a, b og c for andengradspolynomiet, hvis parabel er vist her til nedenfor. Vi ser straks, at både a og c er negative. Vi aflæser, at $c = -2$.



I punktet (0, -2) tegner vi så tangenten og aflæser hældningen til 4. Så ved vi, at $b = 4$.

Endelig tegner vi linjen gennem punktet (0, 4) og punktet T_x.



Denne linje har hældningen -1, så derfor er $a = -\frac{1}{2}$. Der er altså tale om andengradspolynomiet

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 2.$$

Øvelse 1

Vis Sætning 2 ved at udnytte toppunktsformlen og formlen til beregning af hældningskoefficient.

Øvelse 2

Til sammenligning: Aflæs på parablen herover to punkter, f.eks. (2, 4) og (8, -2). Vi forudsætter, at c er aflæst til -2.

Opstil to ligninger med to ubekendte og find på denne måde a og b. ◊