LONDON-KURSUS 2015
med Matematiklærerforeningen

- Forslag og idéer til undervisningen før og under besøget

Kursusledere: Hans Damm-Jakobsen, Jeanette Axelsen.

Program

	Mandag 13/4	Tirsdag (arkitektur)	Onsdag (fysik/navigation)	Torsdag (kryptering/historie)	Fredag 17/4
For-middag		Maths-in-the-City Walk (http://www.mathsinthecity.com/)	Greenwich Village (navigation mv.)	Bletchley Park	Hjemrejse
Efter-middag	Indkvartering	13^{00} Afgang til Kings Cross Station 14^{00} Afgang til Russell Square og gåtur til British Museum, hvor vi ser Foster+Partners' overdække af gården.	Gåtur under Themsen Science Museum (Matematikafdelingen Kryptologi, som optakt til Bletchley Park)	Bletchley Park (fortsat) Sen eftermiddag er friholdt.	
Aften	18^{30} Besøg hos arkitektfirma Foster +Partners			Fællesmiddag	

Program: Præsentation og information

At komme rundt

Det er lettest at rejse rundt med undergrundsbanen (The tube) på et Oyster Card eller Travel Card. Tal med dit rejsebureau om mulighederne. Se undergrundskortet på:
https://www.tfl.gov.uk/cdn/static/cms/documents/standard-tube-map.pdf

Arkitektfirmaet Foster+Partners

Hjemmeside og kontaktformular: http://www.fosterandpartners.com/contact/

Selvom der ikke direkte er matematik i det, er det alligevel spændende at besøge ét af verdens mest velrenommerede arkitektfirmaer og se, hvordan de arbejder. Lord Foster har designet mange kendte bygninger, heriblandt 'The Gherkin' i London og overdækningen på British Museum. Hos Foster+Partners har de en gruppe, Specialist Modelling Group, der arbejder med 3d-modellering, og de har enkelte med matematisk baggrund ansat. Det er muligt at få et oplæg, hvis man kontakter dem via kontakt-formularen på hjemmesiden (link herunder). Man kan I kontakten bede om at høre mere fra SMG gruppen og så vil de vise forskellige bygningskonstruktioner og de optimeringsproblematikker, der ligger at balancere økonomi, materialeforbrug, bæredygtighed mv. Det er interessant og visuelt og noget, der kan tænde eleverne. Firmaets hovedsæde ligger på sydsyden af Themsen stik syd fra Hyde Park. Nærmeste station er Sloane Square på Circle el. District Line ca. 2 km derfra.

Læs mere på: https://plus.maths.org/content/perfect-buildings-maths-modern-architecture

---

Math walk in the city

Hjemmeside: http://www.mathsinthecity.com/

Turen er tilrettelagt med udgangspunkt i hjemmesiden http://www.mathsinthecity.com/, som den engelske matematiker Marcus de Sautoy og et hold studerende fra Oxford College har udviklet. Det er muligt på hjemmesiden at skrive til holdet og spørge om de kan lave en rundvisning, men det afhænger af, om de studerende har fri på den dag. Vi erfarede at det kan være svært at ramme en dag, de faktisk kan. Dog er turen og dens indhold godt beskrevet i disse noter samt på hjemmesiden. Man kan skrive til dem og forhøre sig på denne side: http://www.mathsinthecity.com/contact. Turen er ca 1,5 km men kan udvides, og den ligger helt centralt i London, hvorfor det af mange grunde er en yderst seværdig og skæg tur at gå. Konceptet med at man skiftevis går og laver matematik el. opgaver virker godt. Det er også muligt at lade elever holde oplæg undervejs om de steder og bygninger, man ser.
Man kan også have det britiske Royal Society som omdrejningspunkt for en mere videnskabshistorisk tilgang: Arkitekten bag St Pauls katedral og mange andre kirker, Christopher Wren, var én af hovedmændene bag Royal Society.

British Museum

Hjemmeside: http://www.britishmuseum.org/

Der er ikke noget direkte matematikrelevant at lave på British Museum, men der er en fantastisk overdækket gård i midten af den enorme bygning som er et blik værd. Det er en enorm hvælving med geometriske former og er tegnet af Foster+Partners (færdigbygget i 2000). Man kan læse mere om projektet hér: http://www.fosterandpartners.com/projects/great-court-at-the-british-museum/. Museet er gratis at besøge og ofte meget velbesøgt af turister og skoleklasser. Ligger tæt på stationen Russell Square på Piccadilly Line.
Der er normalt *ikke* nogle af museets papyri med matematik på udstilling.

Greenwich Village

Hjemmeside: http://www.rmg.co.uk/

Greenwich Village og Royal Observatory har meget at byde på og man skal vælge ud, hvad der giver mening for eleverne ud fra det fokus, studieturen har. Indgangen til Royal Observatory koster £7 for grupper, men det er en fin og spændende oplevelse med rigtig mange relevante, faglige pointer i samarbejde med fysik eller historie om navigation. Man vil have let ved at lade eleverne arbejde med et arbejdsark i forbindelse med besøget. Man kan booke billetter og rundvisning ved at kontakte dem: Tel: +44 (0)20 8312 6608 | E-mail: bookings@rmg.co.uk. Bemærk at man ikke skal købe billetter til gruppebesøg på hjemmesiden, da det er til en højere pris.
Der ligger desuden et søfartsmuseum tæt ved (Maritime Museum) som er gratis, men det er overfladisk og de faglige pointer er yderst få.
Man kommer til Greenwich Village ved at rejse til stationen Monument på Circle/District/Central Line og videre med togbanen DLR til stationen Greenwich. Kan gøres indenfor 2 zoner.

Science Museum

Hjemmeside: http://www.sciencemuseum.org.uk/

Science Museum ligger i Kensington og har gratis indgang. Det er et flot museum, der kan inspirere til mange ting. Science museum har en mindre matematikafdeling med forskellige historiske instrumenter (se: http://www.sciencemuseum.org.uk/visitmuseum_OLD/galleries/mathematics.aspx) , og de har noget om kryptologi, der kan bruges som optakt til Bletchley Park. Desuden er der en del for andre fag, særligt fysik, at komme efter. Man kunne eksempelvis have et fokus i fysik og engelsk/historie på James Watt og dampmaskinens betydning for den tidlige engelske industrialisering. Der er 5 minutters gang fra stationen South Kensington på Circle el. District Line. Museet har også en skoleservice (se: http://www.sciencemuseum.org.uk/educators.aspx).
Der åbner en helt nyt matematik-afdeling på Science Museum sidst i 2016. Se mere her:
http://www.theguardian.com/science/2014/sep/10/science-museum-design-mathematics-gallery-maths
Lige ved siden af museet ligger Natural History Museum, som kan være relevant for andre fag.

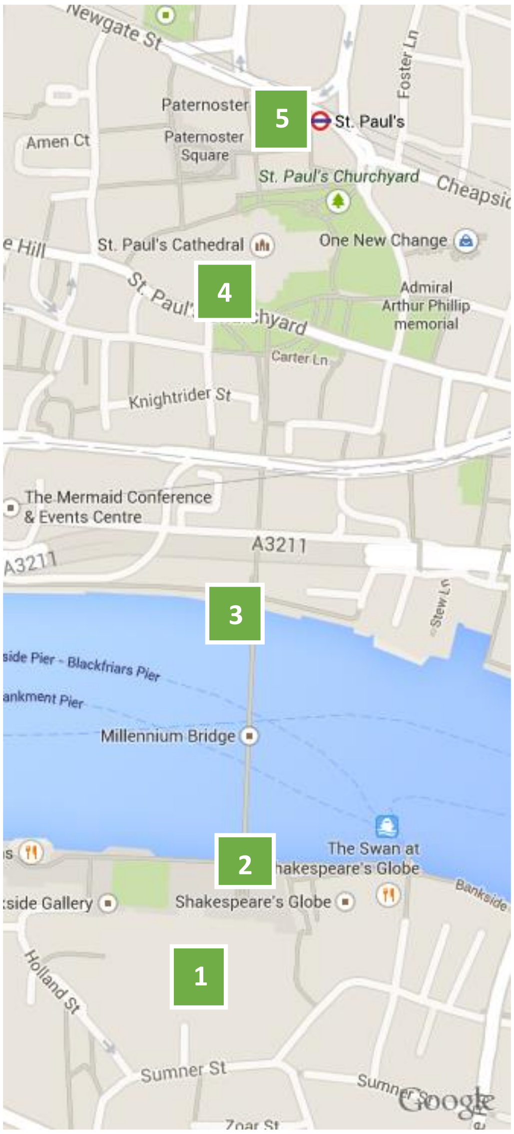
Bletchley Park

Hjemmeside: http://www.bletchleypark.org.uk/

Bletchley Park kender mange som hjemstedet for kodebryderne under Anden Verdenskrig. Stedet indbyder til, at man bruger en hel dag dér på forskellige aktiviteter, primært rent matematikrelateret og/eller med en historisk vinkling. Det koster £14.50 pr person at besøge Bletchley Park. De har flere forskellige tilbud til skoleklasser, hvor man kan høre forskellige typer oplæg om matematik (*educational visits*. Se http://www.bletchleypark.org.uk/edu/) og man er med i en workshop, hvor matematik kommer direkte i spil. Det er noget, eleverne kan få meget ud af. Har man arbejdet med kryptering på forhånd er det fint for eleverne at høre dele af det igen på engelsk og så forstå det. Med hensyn til rundvisninger og oplæg skal man sørge for at være i meget god tid med booking. De kan være booket op 6 måneder frem i tiden, så sørg for at få dette punkt på plads som noget af det første. Kontakt dem på groupbookings@bletchleypark.org.uk eller 01908 272673.

Bletchley Park ligger i byen Milton Keynes en lille time fra London, så man skal med lokaltog fra London Euston Station til Bletchley, hvor Bletchley Park ligger ca 5 minutter fra stationen. Billetterne kan købes på de større stationer i London, der har det røde 'National Rail' ikon. Bemærk at man kan købe dem i forvejen eller på stationen, OG man skal sørge for at rejse udenfor myldretid, dvs. man skal rejse off-peak. Det første off-peak tog fra Euston er i skrivende stund kl 09.24, så man kan være klar på Bletchley Park kl 10.30. Tjek selv tider før afrejse. Der er intet krav om hjemrejsetidspunkt. Retur off-peak billetter koster ca 10-11 pund.

MATH CITY WALK



1. **Tate Modern**
   a. Grafteori
2. **Millenium Bridge**
   a. Stående bølger
   b. Konstruktioner – kvadrater/rektangler versus trekanter
3. **"Væggene" langs Thames**
   a. Kædelinjer
4. **Kuplen på St. Pauls Cathedral**
   a. Kædelinjer, parabler og kubiske kurver
5. **The Tube**
   a. Topologi

Grafteori – turen begynder

Skal man på en gåtur i forbindelse med en studietur, så kunne man jo for sjov lægge noget grafteori ind først og få konstrueret sig en tur, hvor man ikke ser det samme to gange. Samtidig kan man få anledning til at snakke om Euler, og der er gode øvelser til eleverne.

Grafteori har sin rod tilbage i 1700-tallet hvor spørgsmålet om *Broerne i Königsberg* blev stillet: Kan man gå en tur, hvor man krydser de 7 broer i Königsberg netop én gang samt starter og slutter samme sted?

Euler løste problemet ved at anskue problemet ved at forenkle det til en graf.

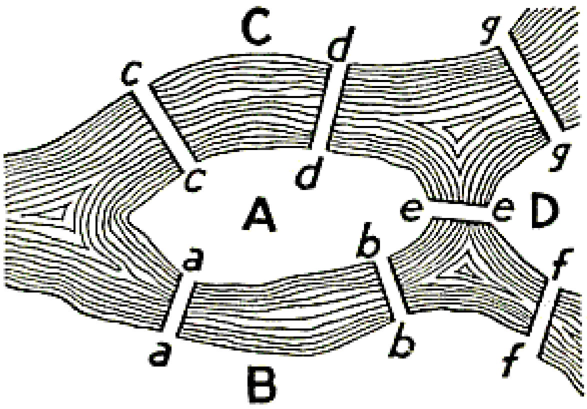


FIGURE 98. *Geographic Map: The Königsberg Bridges.*

En graf er defineret ved en samling af knuder samt kanter, der forbinder knuderne. Antallet af kanter, der udgår fra et punkt, kaldes for graden hørende til knuden. En tur er en række kanter der tilsammen får forbundet to knuder. Turen kaldes en cykel, hvis turen er lukket dvs. starter og slutter samme sted.

Broerne i Königsberg bliver kanter, der forbinder punkterne A-D. Euler fandt frem til, at det ikke kunne lade sig gøre, idet der var mere end to knuder med ulige grad. Det er yderst let at tjekke om en graf har en Eulertur.

Lidt løst sagt - hvis man kan komme rundt, som spørgsmålet lød, så har man en Eulertur. Et lignende problem kaldet *The Travelling Salesman* har givet anledning til begrebet en Hamiltontur. Her er kravet blot, at man ikke må komme til den samme knude mere end én gang. Der findes ingen effektiv måde til at tjekke om en graf har en Hamiltontur.

Grafteori kan være et godt supplerende emne, som virker på forskellige niveauer og lægger til både spil (se Spillet Spirer nedenfor) og ræsonnementer. Man kan starte HELT fra bunden med at indføre de basale definitioner og bygge det hele op.

Litteratur:

Carstensen, Jens: *Grafteori*, Systime, 1992
Chartrand, Gary: *Introductory Graph Theory*, Dover, 1977
Grøn, Bjørn m.fl.: *Hvad er matematik A?*, L&R-Udannelse, 2013
Fajstrup, Lisbeth: http://numb3rs.math.aau.dk/wordpress/?p=47 (figuren er hentet fra denne side)
Introduktion til grafteori. Carsten Thomassen, Broerne i Königsberg
http://gymportalen.dk/sites/lru.dk/files/lru/docs/projekt_0-1-carsten_thomassen_-_broerne_i_koenigsberg.pdf
Introduktion til grafteori. Carsten Thomassen, Grafteori:
http://gymportalen.dk/sites/lru.dk/files/lru/docs/projekt_0-1-carsten_thomassen-Broer,_skak_og_netvaerk.pdf
Baktoft, Allan: *Matematik i Virkeligheden* Bind 2, Forlaget Natskyggen, 2011.

Tværfaglige forløb: Fysik: Elværk – at fordele strøm ud til en by. Idet turen starter ved Tate Modern, som er et gammelt elkraftværk, så kunne det blive et udgangspunkt.

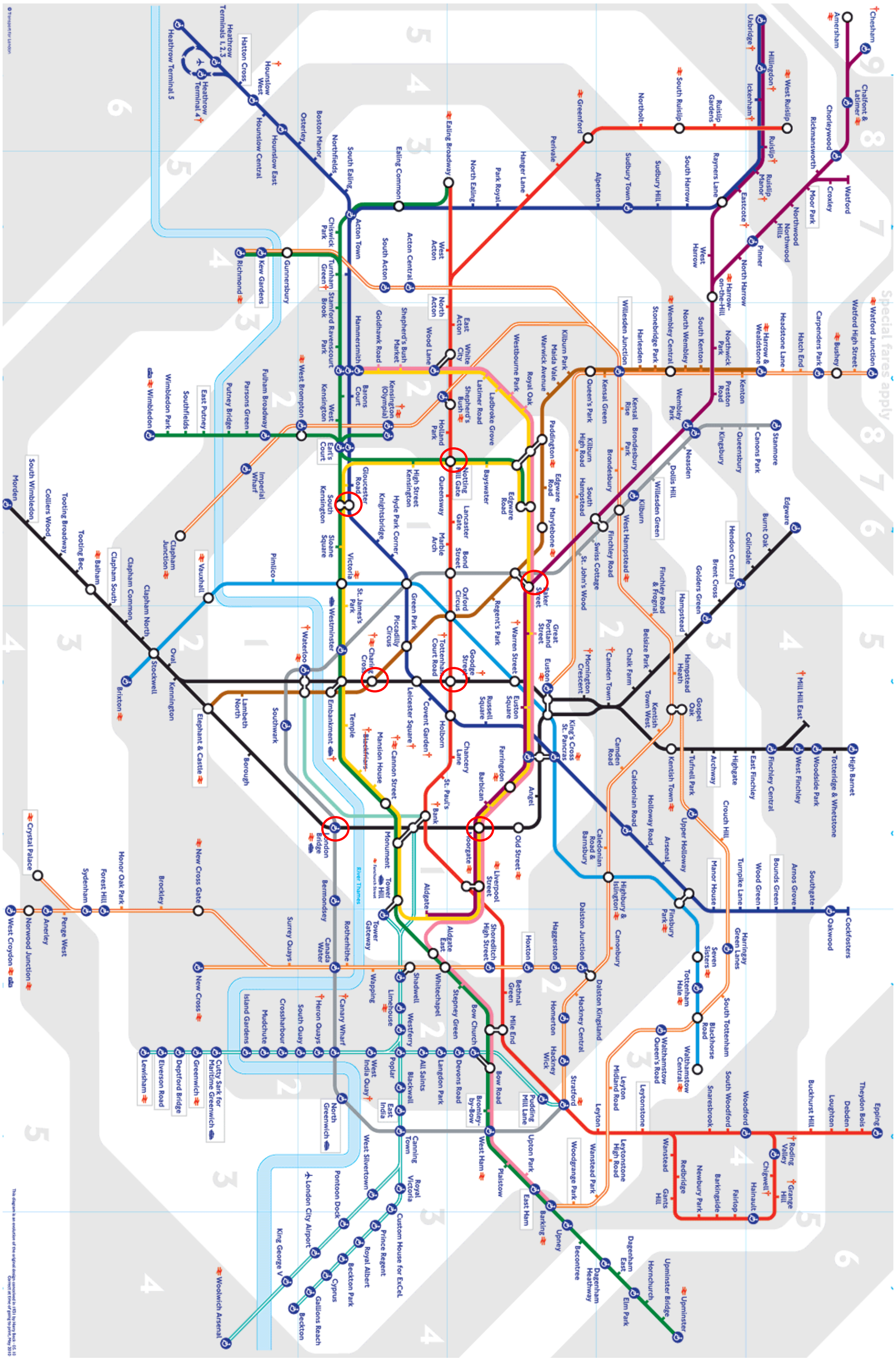
Øvelser med eleverne

Undergrundsnetværket er et eksempel på en forbundet graf. Bed eleverne hjemmefra i grupper lave en Hamiltontur givet knuderne på kortet over The Tube på næste side. Man stiller sig som lærer i forhallen eller et andet veldefineret sted på én af stationerne og ser på, hvilken gruppe der gennemløber deres rute hurtigst. For at sikre sig, at eleverne kommer rundt til alle knuder, skal de tage et billede af stationen med tidspunkt som dokumentation for, at de har været der. Man kunne også arbejde med mange andre aspekter ved undergrunden ud fra grafteori.

Spillet Spirer: Der er dette enkle, sjove spil, der er opfundet af to amerikanske matematikere i 1960erne: http://en.wikipedia.org/wiki/Sprouts_%28game%29. Spillet lægger op til en forståelse af grafteori, og der er mange gode ræsonnementsovervejelser gemt i spillet omkring mindste og største antal træk for et givent antal startknuder. Der er også en norsk beskrivelse af spillet her: http://www.matematikksenteret.no/content/2721/Spirer

Man kan bruge grafteori og topologi til at træne repræsentationskompetence og ræsonnementskompetence uden at komme ind på bevisførelse i emnet, som oftest er vanskelig. Der er dog rigtigt mange andre gode ræsonnementer at undersøge, og man kan lade eleverne selv komme med postulater, særligt i forbindelse med spillet Spirer (se links).

Man kan også med grafteori og Königsberg-problemet tage et videnskabsteoretisk udgangspunkt og diskutere, om matematik opfindes eller opdages.



Lidt om stående bølger og/eller harmoniske svingninger samt konstruktioner

En stående bølge er en svingning af en streng spændt ud mellem to faste punkter som f.eks. en guitarstreng mellem stolen og sadlen. Matematikken bag er naturligt givet ved trigonometriske funktioner. Det interessante ved stående bølger er fænomenet interferens, hvor to bølger der mødes enten udslukker hinanden eller forstærker hinanden.

I den virkelige verden bliver dette fænomen interessant med negativt fortegn, når f.eks. en hængebro sættes i svingninger pga. forhold som enten vejret (Tacoma Narrow Bridge i staten Washington, USA) eller fordi mennesket agerer uforudsigeligt (Millenium Bridge, London). Millenium Bridge er en fodgængerbro. Da broen åbnede skete der det, at da broen begyndte at svinge, så begyndte fodgængerne på broen at lave en modreaktion, og det fik den betydning, at de gik i takt og dermed ikke fik udslukket men forstærket udsvinget på broen. Altså en menneskelig modreaktion som bygherrerne ikke havde taget højde for.

Styrken i en konstruktion benyttes i arkitekturen som f.eks. i *The Gherkin*. Overfladen består af trekantede glasflader, og en af grundene er trekantens styrke over for rektanglets. Har man hygget sig med GeoMac er det også let at genkende dette. Eller korthuse for den sags skyld.

Litteratur:

Benoni, Torben & Elvekjær, Finn:
http://fysikabbogen1.systime.dk/index.php?id=295

Grøn, Bjørn m.fl.: Projekt om stående bølger fra *Hvad er matematik B?*, L&R-Uddannelse
http://gymportalen.dk/sites/lru.dk/files/lru/projekt_7_1_den_vibrerende_streng__staaende_boelger.pdf

Kollapset af Tacoma Narrows Bridge i Washington, USA https://www.youtube.com/watch?v=j-zczJXSxnw

The Millenium Bridge Wobble: https://www.youtube.com/watch?v=gQK21572oSU

Tværfaglige forløb: Fysik: stående bølger, statik. Musik: stående bølger – den matematiske side af sagen

Øvelser med eleverne

Stærke og svage konstruktioner: Del eleverne op i et lige antal grupper. Halvdelen af grupperne skal have et sæt blomsterpinde og gummibånd, som de skal samle en kube af. Den anden halvdel skal samle et tetraeder vha. samme materialer. De må ikke slippe konstruktionen før der gives signal. Herefter skal de så se, hvilken type af de to konstruktioner, der er mest stabil.

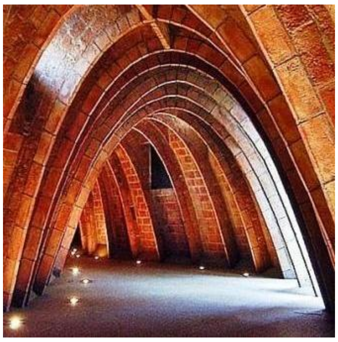
På hjemmesiden http://www.bridgebuilder-game.com/ kan man downloade et spil, hvor man skal bygge broer over en kløft og teste deres holdbarhed ved at lade et tog køre over broen. Her kan man hurtigt lære, at trekanter er mere stabile end firkanter. Man kan evt. perspektivere ved at henvise til diverse haveskure, havelåger eller hegn rundt omkring, hvor der er en skrå afstiver i rektanglerne.

Kædelinjer

Hvis man, når man bevæger sig omkring i verden, lægger mærke til formen på f.eks. broers buer, kirkers hvælvinger og kupler, porte og vinduer, så kan man ind imellem blive i tvivl om hvorvidt der er tale om parabler, cirkelbuer eller kædelinjer.

Parabler og cirkelbuer er velkendte også for gymnasieelever. Men kædelinjen kender de færreste. Den opstår ved at hænge en kæde op i to punkter. Bernoulli blev den, der løste gåden, og fandt frem til forskriften $y(x) = k \cdot \cosh(\frac{1}{k} \cdot x)$, hvor $k > 0$ er en konstant.

Kædelinjen vendt om på hovedet er en stærk konstruktion, der kan bære sig selv. Cirkelbuer har ikke denne egenskab. Her kræves der støttepiller under.



St. Pauls-katedralen benytter den omvendte kædelinje i den midterste kuppel, der er den bærende af de tre. Et andet eksempel ses desuden i Gaudis arkitektur i Barcelona. Et tredje eksempel på anvendelsen af kædelinjen som en stærk konstruktion er buen *Gateway Arch* i Sct. Louis, Missouri, USA.

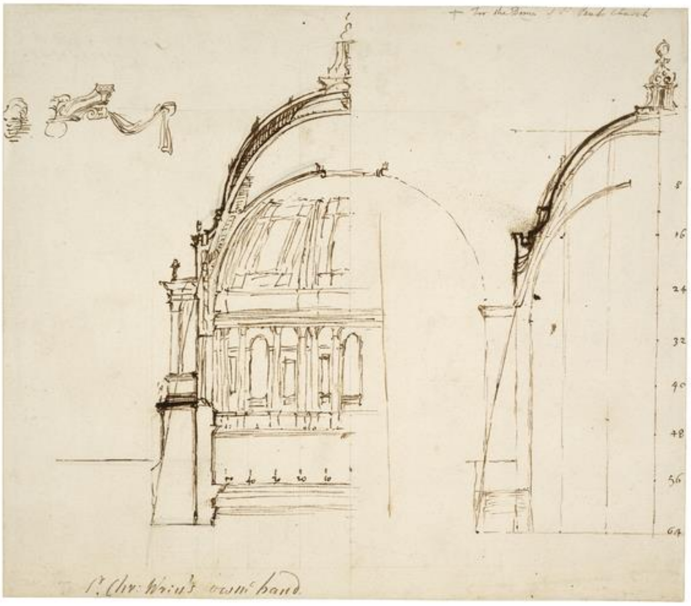
Øvelser med eleverne

Bed eleverne på en gåtur finde eksempler på kædelinjer og bed dem om at tage et billede af kædelinjen. Det er ret vigtigt, hvis man vil lave en efterbehandling på computeren, at billederne tages vinkelret på. Man kan, når man kommer hjem fra studieturen, prøve at bestemme udtryk for kædelinjen i sit CAS-værktøj. Som optakt hjemmefra kan man undersøge kædelinjens egenskaber sammenlignet med parablens ved at prøve at trække i graferne. Man vil se, at trækker man i en parabel, så får man igen en parabel. Det samme gør sig ikke gældende for en kædelinje. Her skal der trækkes lige meget i x- og y-retningen.

Litteratur:

Grøn, Bjørn m.fl.: *Hvad er matematik A?*, L&R-Uddannelse, 2013
Jakobsen, Ivan Taftebjerg: *Antoni Gaudi. Geometrien bag arkitekturen*, Matematiklærerforeningen, 2011
Maths In The City: http://www.mathsinthecity.com/tours/maths-city-london?full=1#node-263

Sct. Pauls Cathedral



Katedralen Sct. Pauls er designet af matematikeren og arkitekten Cristopher Wren i slutningen af 1600-tallet. Egentlig ville han gerne bygge en barokkirke, men det er kun kuplen, der fik lov til at blive bygget efter barokt forbillede som en sfære.

Det man ikke lægger mærke til ved kuplen på Sct. Pauls er, at den faktisk indeholder 3 kupler. Den yderste er som sagt en sfære, som også skulle symbolisere en kosmisk harmoni. Men indenunder er der to yderligere kupler.

Den inderste er et mindre format af kuplen, som passer til proportionerne inde i kirken.

I mellem de to kupler befinder der sig en 3. kuppel konstrueret efter den stærkeste konstruktion, nemlig kædelinjen. Wren var dog ikke bekendt med formlen for kuplen og troede, den kunne beskrives vha. et 3.gradspolynomium $y(x) = x^3$, hvor den del af parablen for $x > 0$ blev spejlet i 1.aksen. Den midterste kuppel er dermed en indre støtte for den sfæriske kuppel som yderligere har en lanterne siddende øverst til at tynge ned i toppen.

Denne artikel beskriver det matematiske nærmere med fine skitser: http://www.jstor.org/discover/10.2307/532075?uid=3737880&uid=2&uid=4&sid=21106171390141

Man finder i øvrigt meget om matematik i arkitektur og Christopher Wren på videnskabshistorisk museums hjemmeside: http://www.mhs.ox.ac.uk/compassandrule/online-exhibition/

Tværfaglige forløb:

Dansk: barok

Fysik: Statik

Litteratur:

Maths in the City: http://www.mathsinthecity.com/tours/maths-city-london?full=1#node-263

Topologi til The Tube

Nogle af de overraskende resultater man får igennem topologien er, at topologisk set er en doughnut og et kaffekrus med hank det samme, hvorimod en badebold og en badering er to forskellige objekter. Det man kan koge det ned til er, at man i det første tilfælde kan lave en kontinuert bijektiv afbildning fra en doughnut til kaffekoppen, hvor den inverse afbildning også er kontinuer. Det kan man ikke i det andet pga. hullet i baderingen. Styrken ved topologien er, at selvom afstande, vinkler og arealer ikke bliver bevaret, så bevares strukturerne dvs. den måde "tingene" på formen er forbundet. Så selvom man trækker eller skubber på en given form, så bevares den indre struktur, om man så må sige.

Inden for topologi er Poincarés formodning fra 1904 blandt de kendte nemlig at sfæren er den eneste form uden huller topologisk set. Og ikke kun i 3 dimensioner men generelt. Denne formodning blev bevist i 2002 af en russisk matematiker, Grigori Perelman.

På de to næste sider ses fire forskellige kort over undergrundsbanerne i London. Der findes kort, der er ældre, men de fire viste skulle gerne vise en udvikling. Og det radikale skift kommer i 1933, hvor Harry Beck, en ansat ved The Underground, laver et markant anderledes kort over linjerne i sin fritid, hvor afstande mellem stationerne ikke var vigtig, men hvor det handlede om hvordan de forskellige linjer var forbundet. Det er hurtigt at navigere i undergrunden, men spørgsmålet er, om der er et tab, i og med man her ser bort fra geografien. Kortene er alle sammen hentet fra hjemmesiden http://homepage.ntlworld.com/clivebillson/tube/tube.html#Today

Litteratur:

Om topologi og det nye kort over undergrundsbanerne: http://www.mathsinthecity.com/tours/maths-city-london?full=1

Om topologi generelt fra UNSWelearning (her 5. leksion):
https://www.youtube.com/watch?v=4U9XzZjxMFI

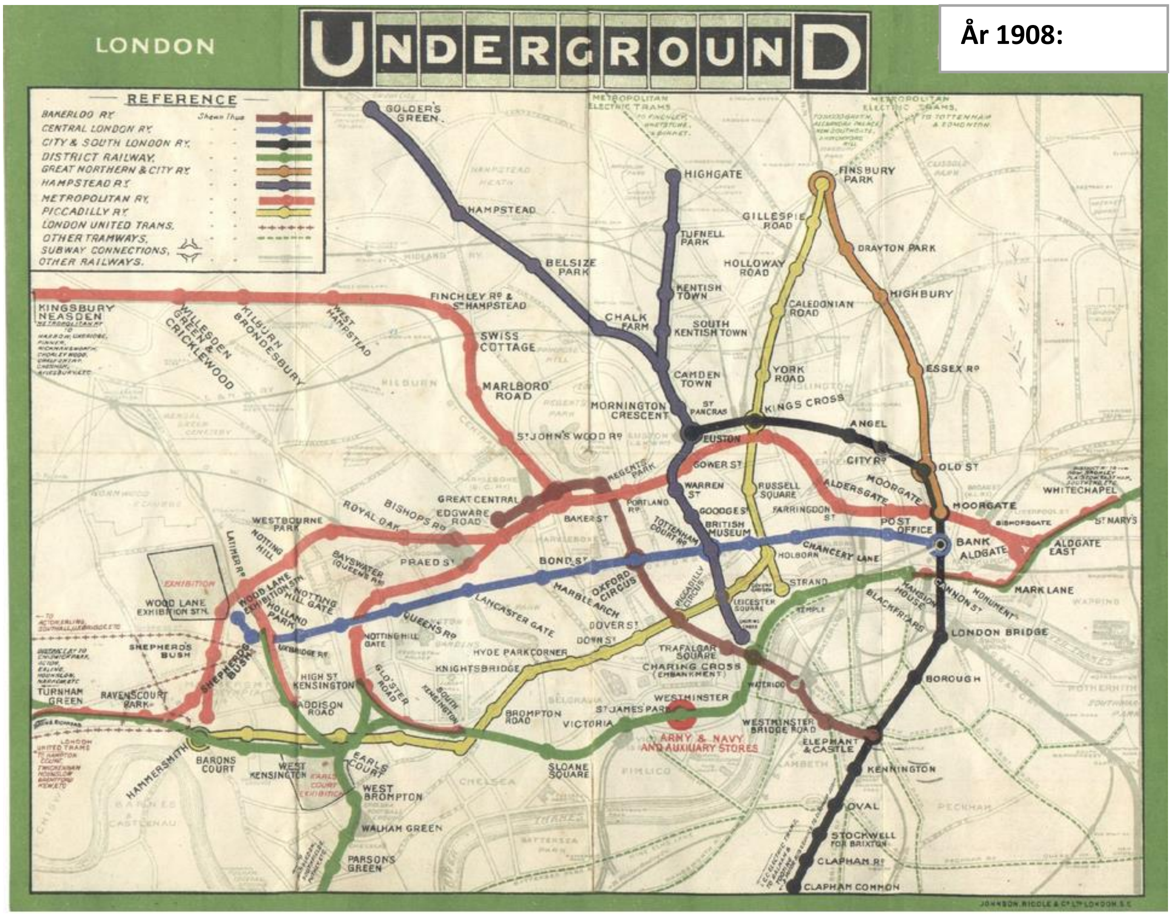
Øvelser med elever:

Denne øvelse kan evt. vise hvordan afstande til tider kan have en vis betydning, og hvor The Tube ikke er den hurtigste vej rundt i London. Send et hold elever afsted fra St. Pauls med mødepunkt ved Barbican. De skal finde den hurtigste rute. Når de er sendt af sted, beder man den anden halvdel om at tage deres kort over London frem for at finde den bedste rute som fodgænger og sende dem afsted. Hvem mon kommer først?

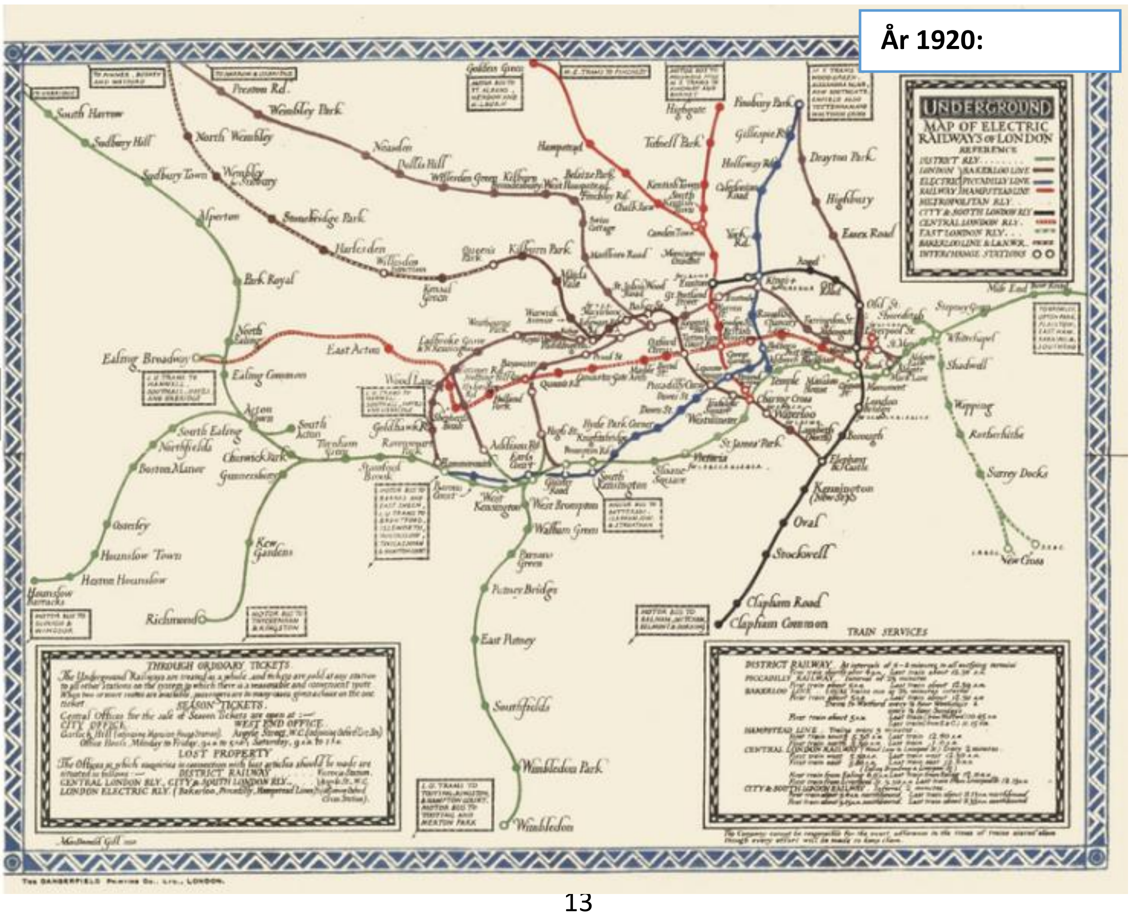
Udvælg nogle linjer fra kortet over "The Tube" og bed eleverne tegne dem ind på et kort over London i de respektive farver. Man kan kigge på stationer, hvor det er mere besværligt at vælge undergrunden, som i øvelsen ovenfor. Man kunne også undersøge, hvilke stationer, der ser ud til at ligge tæt på hinanden, men som bevæger sig væk

En lille sjov øvelse: https://www.youtube.com/watch?v=aiNl-EL6vfk

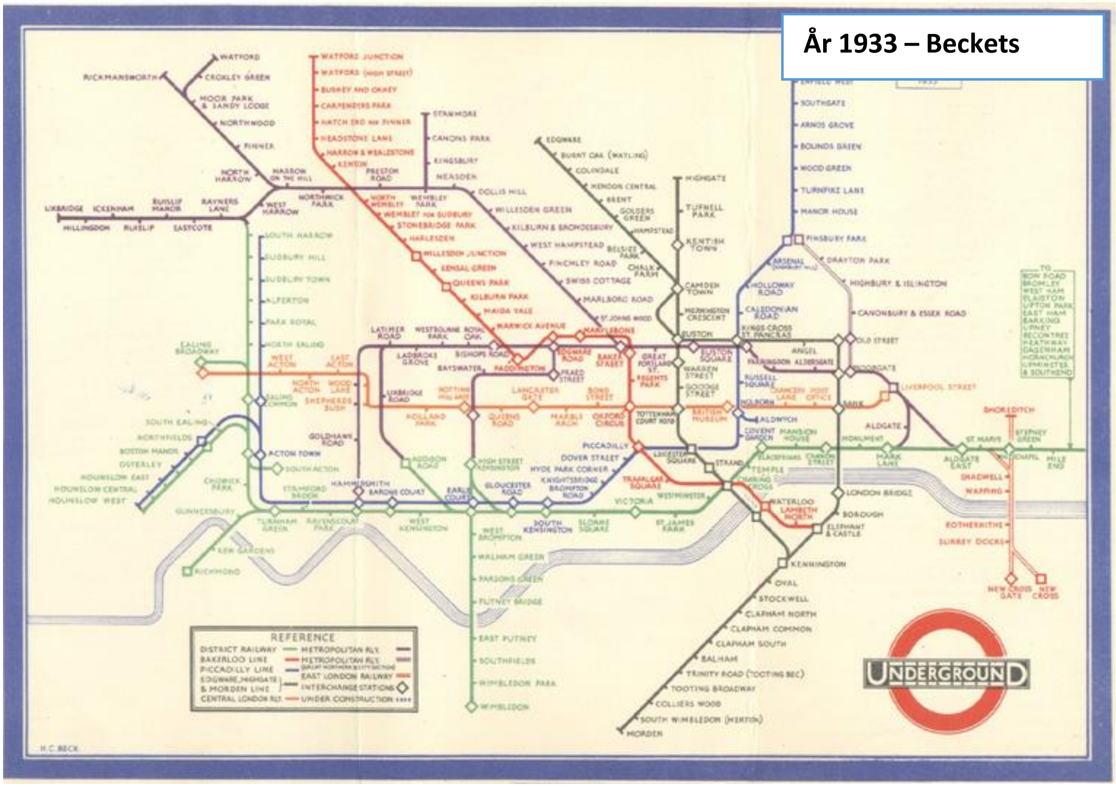
År 1908:



År 1920:



År 1933 – Beckets

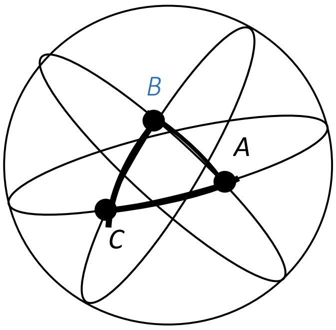


År 2002:

Greenwich og Royal Observatory

En tur til Greenwich for at se The Royal Observatory og opleve at stå med et ben i både øst og vest på samme tid er en oplevelse man næsten ikke skal undslå sig, hvis man er med en klasse i London – eller privat for den sags skyld.

I matematik kan behandles flere forskellige emner men nok primært navigation og sfærisk geometri. Den sfæriske geometri opstod som et resultat af, at man gav sig til at stille sig anderledes i forhold til Euklids parallelaksiom, og bare det giver jo anledning til gode overvejelser i klassen om matematiks natur. Emnet lægger også op til både anvendelse og bevisførelse og kan justeres til niveau og omfang.



En sfærisk trekant er linjestykkerne mellem tre punkter A, B og C på en kugleoverflade som vist på figuren. Det interessante i arbejdet med sfæriske trekanter er, at vores resultat fra plangeometrien, at vinkelsummen i en trekant altid er 180^o, ikke gælder på sfæren. Her kan summen blive over 180^o. Man kan udlede cosinusrelationer og sinusrelationer for den sfæriske trekant, og herfra er det muligt at beregne afstande på sfæren. Som anvendelse kan man beregne afstande på jordkloden. Ligeledes kan man arbejde med længdegrader og hele historien bag Greenwich og hvorfor vi har længdegraden 0^o til at gå lige netop her. Filmen *Longitude* handler om udfordringen med at finde en solid metode til længdegradsbestemmelse..

Man kan udvide forløbet med at se på GPS-navigation eller man kan gå i en historisk retning og se på den store engelsk triangulering. Den historiske vinkel kan udvides ved at man følge udviklingen af kartografi op gennem tiden. Heri ligger problemet i at projicere en kugleoverflade ned i en plan helt centralt, og teorien kan bygges op omkring begrebet Gauss-krumning. Uden beviser er det ikke for svært.

Er man på besøg kan det give en oplevelse at få det arrangeret, så man kan opleve kuglen på toppen af observatoriet stige op lidt i kl. 13 for så at falde ned kl. præcis 13:00. På vejen hjem fra Greenwich kan man krydre turen med en gåtur under Themsen, som starter ved Cutty Sark.

Links og litteratur

Der findes en del litteratur om sfærisk geometri, og her er et lille udpluk.

Fajstrup, Lisbeth og Nielsen, Dorthe: Sfærisk Geometri – Aalborg Universitet
Shultz, Johnny: *Matematik højniveau 1* – plan og rumgeometri, Forlaget TRIP, 1997

Sinusmatematik (norsk): http://sinusr2.cappelendamm.no/c388353/sammendrag/vis.html?tid=394113
Vestergaards Matematiksider: http://www.matematiksider.dk/sfaere.html

Bletchley Park og Enigmamaskinen

Mange SRP-opgaver har hidtil handlet om krypteringsmetoder op igennem historien dvs. Cæsars chiffer og videre op til Vigneres polyalfabetiske kryptosystem og herfra bevæget sig op til at beskrive Enigmamaskinen. Så regnes der på antallet af muligheder vha. kombinatorik, og sammenlignet med fortidens krypteringsmetoder, så ses det hurtigt, at denne kode er ganske effektiv. Men matematikken strækker sig ofte til det redegørende og så noget anvendelse af kombinatorik. Her kommer der nogle gange krav om at udlede formlerne for kombinationer og permutationer.

Men man kan også gå en anden vej og blive ved Enigmamaskinen. Betragter man maskinen med sine hjul, der roterer bogstaverne i alfabetet, for hvert bogstav man taster, samtidig med at man har lavet nogle permutationer via ledninger, så kan man betragte Enigmaens opbygning ud fra permutationer og dermed permutationsgruppen S_n, som er permutationerne af elementer i en mængde M, hvor $|M| = n$.

Ved hjælp af gruppeteori kan man vise, at de indstillinger, man bruger for at kryptere sin besked på Enigma'en, er de samme, man skal bruge for at dekryptere beskeden. Og i den øvelse ligger der begreber som grupper, neutralelement og inverselement i forhold til en komposition. Ligeledes kan man snakke om cykler, og med disse begreber på plads, så kan man let vise nogle egenskaber ved Enigmakoden. Ligeledes får eleverne et formelt sprog at arbejde med, når de skal løse konkrete opgaver, som forsimpler notationen en del og viser beherskelse af det formelle.

Bletchley Park

Følgende links kan være til inspiration:

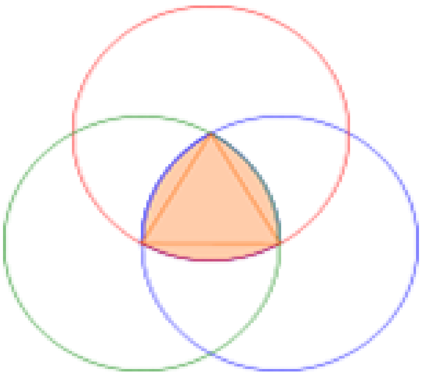
Erik Vestergaard har lavet en række opgaver, som leder frem til en forståelse for Enigmaens virkemåde. Her kan man let tilføje flere opgaver eller lave nye. http://www.matematiksider.dk/enigma/enigma_matematik.pdf

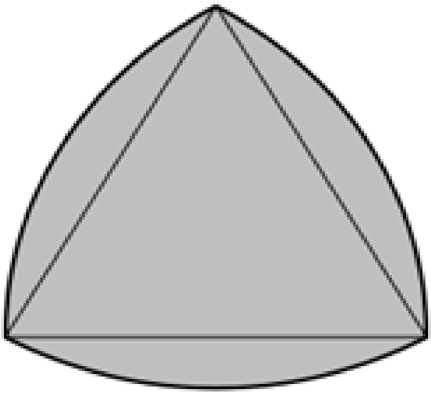
Hvis man vil prøve at kryptere eller dekryptere en besked, så kan det være sjovt at finde en simulator på nettet. På følgende hjemmeside kan man ud over at finde masser af information om Enigmaens opbygning og generel information om maskinen og historien bag, også finde en simulator. http://users.telenet.be/d.rijmenants/en/enigmatech.htm#wiringdiagram

Britiske pence og Reuleaux-syvkanter

De britiske 20 og 50 pence mønter giver anledning til en lille forløb om en sjov udkant af plangeometrien.

Man bemærker, at mønterne herover har syv kanter. Det kan virke som et underligt valg, men de er sværere at kopiere og er alligevel på en måde runde. Det er denne rundhed, vi vil matematisere. *Bredden* af en figur defineres ved afstanden mellem to parallelle, ikke-identiske tangenter til figuren. En konstant bredde svarer til, at figuren kan rulle en hel omgang mellem to parallelle tangenter. Mønterne ovenfor er eksempler på figurer med konstant bredde, og det er jo vældigt praktisk. Desuden er arealet (ressource-behovet) mindre en for en tilsvarende cirkel. En cirkelskive er jo det trivielle eksempel, men der findes temmelig mange andre. Disse er sjove at se på, selv at lave og eleverne i 2g eller 3g kan selv bevise flere sætningerne om dem. Herunder findes et udkast af forslag til arbejdet, og man kan vælge ud af efter, om man bruger det til forløb eller temaopgave.
Her er en fin introduktion til emnet: http://ed.ted.com/lessons/why-are-manhole-covers-round-marc-chamberland





a) Selvklip:

Herover ses en *Reuleaux-trekant*. (http://en.wikipedia.org/wiki/Reuleaux_triangle)

Figuren er bygget over en trekant og den har konstant bredde. Man kan selv klippe en Reuleaux-trekant ud af karton med en passer og saks. Herefter bør man kunne rulle figuren under sig håndflade uden at hånden bevæger sig vertikalt. Det er lidt overraskende for de fleste at denne egenskab ikke er forbeholdt en cirkelskive. Video: https://www.youtube.com/watch?v=g7SYvLCR3Rk

Man kan bruge tid på at snakke om, hvad videoen viser. Sidst viser den netop hvorfor kloakdæksler er runde: De kan aldrig falde ned i hullet (det er en umiddelbar konsekvens af den konstante bredde)

b) Lege med optimering af arealer:

Det er velkendt, at den *isoperimetriske* ulighed siger, hvad de fleste ved: Cirklen er den figur i planen, der for en given omkreds har det største areal. Det er bare ikke helt enkelt at bevise, men man kan snakke sig frem til det. Man kan lade eleverne arbejde i gruppe og lave et 'snakke-bevis' for sætningen ved at lege med snore (fx 1 m) og så hele tiden tænke 'hvad nu hvis'. Man kan så med fordel indføre konveksitet (så det er nemt at se at man kan 'folde' konvekse buler' ud i stedet for ind. Se figurer hér: http://en.wikipedia.org/wiki/Isoperimetric_inequality. Øvelsen træner matematisk ræsonnement.

c) Bevisførelse:

Finde arealet af en Reuleaux-trekant af bredde s. Det bruger kun almindelig plangeometri og har en passende sværhedsgrad. Man kan gå videre og finde arealet af generelle Reuleuax (2n+1)-kanter. Her er det måske passende at diskutere, hvorfor der ikke findes Reuleaux-2n-kanter.

d) Bevisførelse:

Barbier's sætning siger noget overraskende, at alle figurer med konstant bredde d har samme omkreds, nemlig Det kan eleverne godt lave et snakkebevis for, hvor man ruller figurerne.

e) Anvendelse:

Er man interesseret i virkelige anvendelser af dette, bruges idéen i Reuleaux-trekant i bor, der kan bore firkantede huller. Se fx https://www.youtube.com/watch?v=rjckF0-VeGI og

http://mathworld.wolfram.com/ReuleauxTriangle.html

Links og litteratur

Her er mere materiale og opgaver (dog på engelsk), man kan tage udgangspunkt i.
http://ed.ted.com/lessons/why-are-manhole-covers-round-marc-chamberland`

http://www.softouch.on.ca/kb/data/Scan-130117-0001.pdf
http://www.softouch.on.ca/kb/data/Scan-130117-0002.pdf
http://www.softouch.on.ca/kb/data/Scan-130117-0003.pdf

London Eye

Man kan lave en tematiseret aflevering om London Eye, som fungerer bedst, hvis man har arbejdet med trigonometriske funktioner. Har man lyst til at tage en tur i hjulet koster det ca £20.

http://da.wikipedia.org/wiki/London_Eye

Her kommer nogle mulige opgaver i tilfældig rækkefølge.

a) Opstil en trekantsmodel og før et geometrisk argument for, at man fra toppen af hjulet kan se ca 40 km væk.

b) Beregn afstanden på hjulet (buelængden) mellem to gondoler. Bestem den korteste afstand mellem to gondoler

c) London Eye har en diameter på 135 meter og den nederste gondol er 2,5 meter over jordoverfladen. En omgang tager 30 minutter. Man kan da opstille en model (en harmonisk svingning) og stille spørgsmål i denne (som det er gjort i en tidligere eksamensopgave).

d) Det er ikke lykkedes at finde eksakte årlige besøgstal for London Eye. Finder man dem, kan man lave en regressionsopgave ud fra dem.