Nogle didaktiske overvejelser

vedrørende indledende undervisning i funktionsbegrebet i gymnasiet
og nærværende hæftes nytte i så henseende.

af
Dinna Balling og Jørn Schmidt.

Hæftet ”Lige og ulige” sætter fokus på to af de problemer, som ofte opstår for eleverne i forbindelse med den indledende undervisning i funktionsbegrebet.
Disse problemer opstår i forbindelse med de forskellige *repræsentationer* af funktionsbegrebet og samtidigt i dialektikken mellem det *dynamiske* og det *statiske* funktionsbegreb. De to problemsæt hænger nøje sammen. Vi vil her kort diskutere disse problemer og referere til den didaktiske litteratur for den interesserede læser. Henvisninger til litteraturen anføres i kantet parentes.

Problemet med de mange repræsentationer

En funktion kan allerede på gymnasieniveau beskrives på mange måder. Til eksempel:

- en regneforskrift (med eller uden angivet definitionsmængde).
- en graf.
- en sproglig beskrivelse, en algoritme.
- en tabel af samhørende værdier af input og output.
- som løsning til en funktionalligning.

Samtidigt optræder funktioner som hjælpemiddel i forbindelse med løsning af ligninger og uligheder og her træder endnu et sæt fagord i kraft.

Elever skal lære at håndtere flere af disse forskellige repræsentationer og sammenhænge. De skal kunne skifte mellem dem. De skal lære, at nogle begreber eller ord kun giver mening i én af repræsentationerne.

Eleverne skal således kunne skelne mellem en parabel, et andengradspolynomium og en andengradsligning. Det går ikke an at tale om ”andengradsligningens toppunkt” eller ”parablens rødder”, mens det er forholdsvist udbredt at sige, at ”at *c* er skæringspunktet med *y*-aksen” (hvor *c* kommer fra regneforskriften ax^2+bx+c), selvom det vel egentligt er $(0,c)$, som er skæringspunktet. Det er vores påstand, at evnen til at kunne skelne mellem, hvilken repræsentation man benytter på forskellige tidspunkter, er en klar matematisk kompetence og endda en, som har en vis overførselsværdi til andre fag og andre sammenhænge mere generelt. Der er noget reelt at lære. Forståelsen af, at fagordet er ”voksende funktion” og

ikke ”stigende funktion” eller ”tiltagende funktion” er noget værd i sig selv. At kunne formulere at ”funktionens nulpunkter” er lig ”andengradspolynomiets rødder”, som er ”løsningerne til andengradsligningen”, som er ”førstekoordinaterne til grafens skæringspunkter med førsteaksen” er et klart tegn på matematisk modenhed på gymnasieniveau. Her overskrides gymnasiets niveau dog næsten, idet der i gymnasiet ikke normalt skelnes mellem et polynomium og den funktion, som den definerer[1].
Sammenhængen mellem de forskellige repræsentationer er kompliceret og ikke spor ”en-til-en”, hvilket for eksempel kan illustreres ved følgende spørgsmål:

Hvis to funktioner er ens, har de så nødvendigvis

- samme regneforskrift? (Nej)
- samme graf? (Ja)
- samme beskrivelse? algoritme? (Nej)

Er to funktioner ens, hvis

- de har samme regneforskrift? (Nej. x^2 kan være både injektiv, surjektiv, bijektiv og ingen delene)
- de har samme graf? (Ja)
- de beskrives ved samme liste af samhørende punkter af input og output? (Nej)
- de er løsninger til samme funktionalligning? (Nej)

Hæftet om lige og ulige funktioner sætter fokus på sammenhængen mellem regneforskrift og graf. Eleverne skal med hæftet selv eksperimentere med sammenhængen mellem de to repræsentationer. Tesen i hæftet er, at den grafiske/geometriske beskrivelse giver forståelse og indsigt og overblik, medens den regnemæssige/algebraiske beskrivelse giver klare metoder, idet vi kan benytte hele det algebraiske apparat til udregninger og ræsonnementer.
Der er ingen tvivl om, at de dygtigste elever både ville kunne tegne graferne i hånden og udføre de tilsvarende algebraiske udregninger i hånden. For at alle elever skal kunne være med, lægger hæftet op til, at man bruger et tegneprogram eller en grafregner til at fremskynde tegneprocessen. Ligeledes foreslås brugen af et CAS-redskab som genvej til gennemførelsen af de tilsvarende algebraiske udregninger. Dette gøres for at spare tid og forhindre, at matematikken drukner i tegning og regning. Tegneprogrammerne producerer kun graferne men udfører ikke geometriske ræsonnementer på dem. Det skal eleven stadig selv gøre. CAS-værktøjet kan regne men skal stadig modtage de korrekte kommandoer, og eleverne skal fortolke og forstå CAS-værktøjets resultater.

Modsætningen mellem det statiske og det dynamiske funktionsbegreb

En funktion er en maskine, som man kan putte tal ind i, og så spytter den et nyt tal ud. Definitionsmængden består af de tal, som funktionen kan spise. En funktion er altså en

[1] To forskellige regneforskrifter kan godt definere samme funktion. Funktionerne $f, g : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ givet ved $f(x) = x$ og $g(x) = x^2$ er ens som funktioner men forskellige som polynomier.

proces. En funktion gør noget. Denne opfattelse af funktioner understøttes i disse tider af vor anvendelse af lommeregnere, hvor funktioner er knapper på lommeregneren, som kan gøre noget ved tallet på displayet. De relativt langsomme grafregnere, som viser grafen for en funktion blive tegnet fra venstre mod højre, understøtter også denne opfattelse.
I kontrast hertil opfatter *det statiske funktionsbegreb* en funktion som et færdigt, afsluttet objekt. Overgangen fra det dynamiske til det statiske begreb kan markeres ved, at det ikke længere er nødvendigt at kalde en funktion $f(x)$, f er tilstrækkeligt. f er navnet for den samlede mekanisme, som til ethvert x tilknytter en funktionsværdi $f(x)$. I gymnasiet opleves denne overgang måske tydeligst i differentialregningen, når man efter at have set på differentialkvotienter samler alle disse sammen i en afledt funktion eller når funktioner i forbindelse med funktionsfamilier eller differentialligninger pludselig kan være løsninger til ligninger.

Det statiske funktionsbegreb er en abstraktion, som bygger ovenpå det dynamiske funktionsbegreb på samme måde som en helhed er den abstraktion, som består af alle delelementerne. Dette betyder imidlertid ikke, at man udelukkende skal arbejde med det dynamiske funktionsbegreb i den indledende undervisning. Det statiske begreb skal i sving fra starten i mere eller mindre grad. Dette er nødvendigt for at anspore eleverne til at forme objektabstraktionen. Der skal også arbejdes bevidst med at forbinde de to anskuelsesvinkler, idet det er muligt for elever at udvikle både en dynamisk og en statisk funktionsopfattelse uden at kunne forbinde de to [6].

Abstraktionen fra det dynamiske til det statiske funktionsbegreb er matematisk set meget nyttig og sætter os i stand til

- at regne på funktioner, at give mening til $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $f \circ g$.
- at formulere regneregler for kontinuitet og differentiabilitet.
- at opfatte en funktion, som et element i et vektorrum (en funktionsalgebra)
- at opfatte en funktion, som en løsning til en differentialligning (funktionalligning)

De ovennævnte forskellige repræsentationer af funktionsbegrebet er ikke lige dynamiske. En graf er nok den mest statiske repræsentation i elevernes hoveder på trods af, at grafregneren er nødt til at tegne grafen punkt for punkt. Regneforskriften kan opfattes statisk, men navnet og anvendelsen af den signalerer det dynamiske funktionsbegreb. Den sproglige beskrivelse eller algoritmen er også oplagt dynamiske beskrivelser. Tabelbeskrivelser er ikke så tilfredsstillende matematisk set og kan nærmest opfattes som en delvis beskrivelse af grafen.

Hæftet om lige og ulige funktioner arbejder meget målrettet med ”objektificeringen” af funktionsbegrebet. Der formuleres regneregler for funktioners paritet, hvilket giver eleverne mulighed for at se en meningsfuld brug af regning med funktioner, før de skal møde grænseværdier og differentialkvotienter. Begreberne ”lige og ulige funktioner” bygger i høj grad på den statiske opfattelse af funktionsbegrebet. Det er vel også derfor, at lærebøgerne i gymnasiet, som oftest kun definerer begreberne geometrisk, altså ved hjælpe af den mest statiske repræsentation, som eleverne har til rådighed.

Løftet fra det dynamiske til det statiske funktionsbegreb er indbygget i undervisningen på både B- og A-niveau i gymnasiet om end intetsteds eksplicit beskrevet. Den traditionelle progression fra B-niveau til A-niveau er tydeligst i forbindelse med differentialligninger på A-niveau, hvor løsningerne er funktioner. Den fuldstændige løsning til 2.ordens differentialligninger formuleres ofte halvvejs med ord fra den lineære algebra: løsningsrum, linearkombinationer, uafhængige løsninger osv.

Litteratur

De to ovennævnte problemstillingeri forbindelse med indledende undervisning i funktionsbegrebet kender alle undervisere i gymnasiet fra deres praksis. Problemerne omtales også utallige gange i litteraturen.

Indenfor den danske gymnasieverden kan henvises til Undervisningsministeriets hæfte 48 om matematik på hf [4], hvor Claus Michelsen har skrevet en artikel om variabel- og funktionsbegrebet i hf. Den nye bekendtgørelse for hf fællesfaget i matematik illustrerer i øvrigt, hvordan holdningen i ministeriet for tiden er, at funktionsbegrebet er svært og derfor skal nedtones på C-niveau.
I den meget omtalte KOM-rapport [4] om matematiske kompetencer omtales repræsentationskompetence som en af de 8 centrale kompetencer, som eleverne skal arbejde med i deres samlede matematiske uddannelse.

I den matematikdidaktiske litteratur står problemerne også centralt, måske især i undersøgelser af, hvad der sker, når der indføres teknologi i matematikundervisningen. Vi vil tillade os i denne forbindelse at henvise til Dinna Ballings egen afhandling [1] (især kapitel 4), som i koncentreret form redegør for, hvordan problemerne beskrives i den didaktiske litteratur. Desuden skal nævnes Claus Michelsens afhandling fra 2001 [3], hvor han har arbejdet meget med elevernes tilegnelse af funktionsbegrebet. Han har desuden ved flere lejligheder givet udtryk for, at mange af elevernes problemer med funktionsbegrebet skyldes deres manglende forståelse af variabelbegrebet. Mange af overvejelserne omkring funktionsbegrebets repræsentationer og proces/objekt-dualiteten kan overføres til variabelbegrebet. Det er klart, at hvis eleverne har en vaklende forståelse af, hvad en variabel er, bliver det meget svært at forstå funktionsbegrebet, hvor en uafhængig og en afhængig variabel er helt centrale begreber.

Litteraturliste

1. Dinna Balling (2004): Grafregneren i gymnasiets matematikundervisning – lærernes holdninger og erfaringer. PhD-afhandling, SDU. Bogen kan købes i Syddansk Universitets boghandel. http://www.konsulenter.acu-aarhus.dk/db/Afhandling.htm
2. Kaput, J. J. (1992): Technology and mathematics education. I D. A. Grouw(red.), Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York. Macmillan.
3. Claus Michelsen (2001): Begrebsdannelse ved domæneudvidelse. Elevers tilegnelse af funktionsbegrebet i et integreret undervisningsforløb mellem matematik og fysik. PhD-afhandling, SDU. Bogen kan købes i Syddansk Universitets boghandel.
4. Claus Michelsen (2003): Variabel- og funktionsbegrebet i hf på fællesfag og tilvalg. UVM´s hæfte 48 i serien om Udviklingsprogrammet for fremtidens ungdomsuddannelser. http://us.uvm.dk/gymnasie/udvikling/haefte48/haefte48.htm?menuid=150515
5. Mogens Niss og Thomas Højgaard Jensen red. (2002): Kompetencer og matematiklæring: Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisningen i Danmark. Imfufa, RUC. http://pub.uvm.dk/2002/kom/ .
6. Niss, M.(1999): Aspects of the nature and state of research in mathematics education. Educational studies in mathematics nr. 40, side 1-24.
7. Sfard, A.(1991): On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational studies in mathematics nr. 22, 1-36.