Analyse af tredjegradspolynomiet

Kasper Bjering Søby Jensen, Roskilde Katedralskole

Vi er vant til analysen af andengradspolynomiet, som er fast kernestof på både B– og A–niveau. Tredjegradspolynomiet spiller en langt mere tilbagetrukken rolle. Det er en skam, for analysen indeholder mange gode ræsonnementer.

Jeg stillede selv følgende spørgsmål til mundtlig A–niveau-eksamen denne sommer i emnet:

> *»Forklar om funktioner af én og to variable, herunder om stationære punkter og deres art. Redegør ved brug af differentialregning for tredjegradspolynomiets stationære punkter og vendepunkt.«*

Eksaminationerne i spørgsmålet – det blev med coronaregler til tre i alt – var særdeles gode. Jeg mener derfor, at det kan anbefales at give analysen lidt opmærksomhed.

Mit udgangspunkt er en begrebsfokuseret tilgang til funktions-analyse, baseret på *f*, *f* ' og *f* '' samt begrebsparrene nulpunkt og fortegnsvariation (positiv/negativ), ekstremumspunkt og monotoniforhold (voksende/aftagende) samt vendepunkt og krumningsforhold (konveks/konkav).

Der gælder de velkendte teoretiske sammenhænge, hvor fortegnsvariationen for *f* ' angiver monotoniforholdene for *f*, og fortegnsvariationen for *f* '' angiver krumningsforholdene for *f*.

Endeligt arbejdes der med begrebet *stationært punkt* (hvor $f'(x) = 0$), samt artsbestemmelse af disse med brug af fortegn for *f* ''. Denne analyse anvendt på funktioner af én variabel er en god optakt til den tilsvarende analyse anvendt på funktioner af to variable.

Analysen af tredjegradspolynomiet er så tilpas simpel, at elever sagtens kan kastes ud i at lave den selv – eventuelt med lidt stilladsering fra læreren.

Definition og sætning

Et tredjegradspolynomium er en funktion, hvis forskrift kan skrives på formen:

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d, \quad a \neq 0$$

Heraf følger:

$$f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$$

$$f''(x) = 6a \cdot x + 2b$$

Tredjegradspolynomiet *f* har ét vendepunkt i $x_0 = -\frac{b}{3a}$.

For $a > 0$ er *f* konkav for $x < x_0$ og konveks for $x > x_0$.

For $a < 0$ er *f* konveks for $x < x_0$ og konkav for $x > x_0$.

For $b^2 < 3a$ har *f* ingen stationære punkter, og ét nulpunkt.

For $b^2 = 3a$ har *f* ét stationært punkt, som ligger i x_0, og ét nulpunkt.

For $b^2 > 3a$ har *f* to stationære punkter.

Dels et lokalt maksimum i $x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$,

dels et lokalt minimum i $x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-3ac}}{3a}$.

For $f(x_1) < 0$ eller $f(x_2) > 0$ har *f* ét nulpunkt.

For $f(x_1) = 0$ eller $f(x_2) = 0$ har *f* to nulpunkter.

For $f(x_1) > 0 > f(x_2)$ har *f* tre nulpunkter.

Vendepunkt og krumningsforhold

Grafen for *f* har ét vendepunkt. Vendepunktet bestemmes ved at løse $f''(x) = 0$:

$$6a \cdot x + 2b = 0$$

$$6a \cdot x = -2b$$

$$x = -\frac{2b}{6a} = -\frac{b}{3a}$$

Der er kun én og altid én løsning på denne ligning, når $a \neq 0$. Da *f* '' er en lineær funktion, med en hældning forskellig fra 0, vil den skifte fortegn ved sit nulpunkt i $x = -\frac{b}{3a}$. Dermed vides det, at *f* har vendepunkt i $x = -\frac{b}{3a}$.

Hældningen for *f* '' er $6a$. For $a > 0$ er $6a > 0$, og dermed er *f* '' en voksende lineær funktion. Dermed er *f* '' negativ for $x < -\frac{b}{3a}$ og positiv for $x > -\frac{b}{3a}$.

Således vil *f* være konkav for $x < -\frac{b}{3a}$ og konveks for $x > -\frac{b}{3a}$.

For $a < 0$ er $6a < 0$. Dermed er *f* '' aftagende, og således positiv for $x < -\frac{b}{3a}$ og negativ for $x > -\frac{b}{3a}$.

Og således er *f* konkav for $x < -\frac{b}{3a}$ og konveks for $x > -\frac{b}{3a}$.

Antal stationære punkter

For at bestemme eventuelle stationære punkter, løses $f'(x)=0$, som er en andengradsligning:

$$3a\cdot x^2+2b\cdot x+c=0$$

Diskriminanten for ligningen udtrykkes:

$$d=(2b)^2-4\cdot 3a\cdot c=4b^2-4\cdot 3a\cdot c=4\cdot\left(b^2-3a\cdot c\right)$$

For $d = 0$ er der netop ét stationært punkt. Dette gælder hvis:

$$d=4\cdot\left(b^2-3a\cdot c\right)=0$$

$$b^2-3a\cdot c=0$$

$$b^2=3a\cdot c$$

For $d > 0$ er der netop to stationære punkter. Dette gælder hvis $b^2>3a\cdot c$.

For $d < 0$ er der ingen stationære punkter. Dette gælder hvis $b^2<3a\cdot c$.

Tredjegradspolynomiet har altså:

Ingen stationære punkter for $b^2<3a\cdot c$.
Et stationært punkt for $b^2=3a\cdot c$.
To stationære punkter for $b^2>3a\cdot c$.

Art af stationære punkter

Hvis f har to stationære punkter, kan disse bestemmes med løsningsformlen:

$$x=\frac{-2b\pm\sqrt{4(b^2-3a\cdot c)}}{2\cdot 3a}=\frac{-2b\pm\sqrt{4}\cdot\sqrt{b^2-3a\cdot c}}{2\cdot 3a}$$
$$=\frac{-2b\pm 2\cdot\sqrt{b^2-3a\cdot c}}{2\cdot 3a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-3a\cdot c}}{3a}$$

Således ved vi at de to stationære punkter ligger i:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-3a\cdot c}}{3a}=-\frac{b}{3a}-\frac{\sqrt{b^2-3a\cdot c}}{3a}$$

og

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-3a\cdot c}}{3a}=-\frac{b}{3a}+\frac{\sqrt{b^2-3a\cdot c}}{3a}$$

Det ses at de to stationære punkter ligger "symmetrisk" omkring vendepunktet i $x=-\frac{b}{3a}$.

Arten af de to stationære punkter kan nu bestemmes:

$$f''(x_1)=6a\cdot\left(-\frac{b}{3a}-\frac{\sqrt{b^2-3a\cdot c}}{3a}\right)+2b$$
$$=-2b-2\cdot\sqrt{b^2-3a\cdot c}+2b=-2\cdot\sqrt{b^2-3a\cdot c}<0$$

Da $f'(x_1)=0$ og $f''(x_1)<0$, vides det, at f har lokalt maksimum i $x = x_1$.

$$f''(x_2)=6a\cdot\left(-\frac{b}{3a}+\frac{\sqrt{b^2-3a\cdot c}}{3a}\right)+2b$$
$$=-2b+2\cdot\sqrt{b^2-3a\cdot c}+2b=2\cdot\sqrt{b^2-3a\cdot c}>0$$

Da $f'(x_2)=0$ og $f''(x_2)>0$ vides det, at f har lokalt minimum i $x = x_2$.

Hvis f har ét stationært punkt, ligger det i

$$x=\frac{-2b\pm\sqrt{0}}{2\cdot 3a}=-\frac{b}{3a}$$

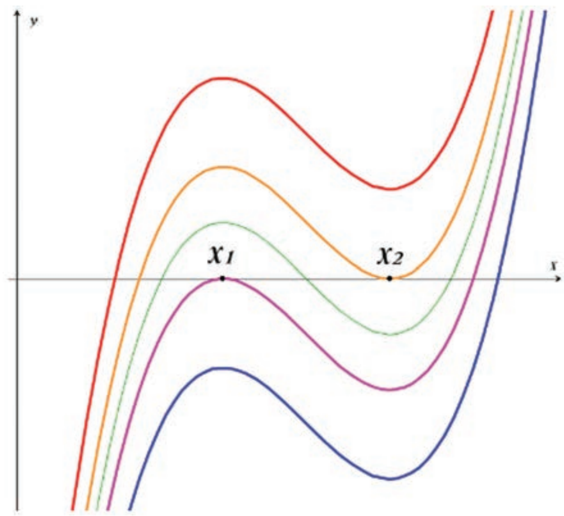
Da dette samtidig er et vendepunkt, vil arten af dette stationære punkt altså være et saddelpunkt.

Antal nulpunkter

Hvis $b^2\le 3a\cdot c$, vil f ikke have noget lokalt ekstremum. Den vil således være enten voksende eller aftagende alle steder. Der vil således være netop ét nulpunkt.
For $b^2>3a\cdot c$ vil f have to lokale ekstrema, et lokalt maksimum i x_1 og et lokalt minimum i x_2, og således have 1, 2 eller 3 nulpunkter.

For $f(x_1)<0$ vil f have ét nulpunkt.
For $f(x_1)=0$ vil f have to nulpunkter.
For $f(x_2)<0<f(x_1)$ vil f have tre nulpunkter.
For $f(x_2)=0$ vil f have to nulpunkter.
For $f(x_2)>0$ vil f have ét nulpunkt.

Dette kan man eksemplificere med tegninger af tredjegradspolynomiets graf (se figur 1).



Figur 1
Fem forskellige situationer for antal nulpunkter.

Litteratur:

Noten *Funktionsteoriens grundbegreber* kan hentes på bjering.dk/mat/funktioner.pdf