Eksakte kurvelængder

Jeppe Ammitzbøll, Borupgaard Gymnasium

I denne artikel søger vi funktioner, hvis graf har en kurvelængde, der kan udregnes eksakt.

Antag, at $I \subseteq \mathbb{R}$ er et åbent interval, og at $f : I \to \mathbb{R}$ er kontinuert differentiabel (dvs. differentiabel med en afledet, der er kontinuert).

Kurvelængden for grafen for f, regnet fra abscissen $x_0 \in I$, er givet ved:

$$L(x) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + f'(u)^2}\, \mathrm{d}u \qquad \text{for alle } x \in \mathrm{I}$$

Sæt

$$g = L' - f' \tag{1}$$

Da $L'(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$ for alle $x \in I$, er $g(x) > 0$ for alle $x \in I$, og

$$(L' - f')(L' + f') = (L')^2 - (f')^2 = 1$$

Dermed er:

$$L' + f' = \frac{1}{g} \tag{2}$$

Ligningssystemet bestående af (1) og (2) er ækvivalent med følgende ligningssystem:

$$L' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{g} + g\right) \tag{3}$$

$$f' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{g} - g\right) \tag{4}$$

Dette viser, at vi kan opskrive stamfunktioner til L' og f', hvis og kun hvis vi kan opskrive stamfunktioner til g og $1/g$. Hvis vi gerne vil have eksplicitte regneudtryk for både $L(x)$ og $f(x)$, kan vi altså – uden at indskrænke vores muligheder – begynde med en kontinuert funktion $g : I \to \mathbb{R}_+$, for hvilken vi kender stamfunktioner til både g og $1/g$. Denne funktion vil fastlægge både f og L (op til additive konstanter) vha. (3) og (4). Hvis g er differentiabel, finder man, at

$$\frac{g'}{g} = -\frac{f''}{L'}$$

og da $g > 0$, og $L' > 0$, ser vi, at hvis man ønsker en konveks funktion, f, skal man vælge g aftagende.

Nedenfor følger nogle opgaver, der er konstrueret ved hjælp af den angivne metode.

Opgave 1. ($g(x) = \mathrm{e}^{-x}$). Lad $f(x) = \cosh(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Bestem længden af den del af grafen for f, hvor 1.–koordinaterne ligger mellem 0 og a, for $a > 0$.

Facit: $\sinh(a)$.

Opgave 2. ($g(x) = \frac{1}{x}$). Lad $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln(x) - \frac{1}{4}$ for alle $x > 0$. Bestem længden af den del af grafen for f, hvor 1.–koordinaterne ligger mellem 1 og $\sqrt{\mathrm{e}}$.

Facit: $\mathrm{e}/4$.

Opgave 3. ($g(x) = \frac{1}{x^2}$). Lad $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}$ for alle $x > 0$. Bestem længden af den del af grafen for f, hvor 1.–koordinaterne ligger mellem 1 og $3/2$.

Facit: $9/16$.

Opgave 4. ($g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$). Lad $f(x) = (\frac{1}{3}x - 1)\sqrt{x}$ for alle $x > 0$. Vis, at $f'(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})$ for alle $x > 0$, og bestem længden af den del af grafen for f, hvor 1.–koordinaterne ligger mellem 1 og 4.

Facit: 10/3.

Opgave 5. ($g(x) = \frac{1}{\tan(x)}$). Lad $f(x) = -\frac{1}{2}\ln(\sin(2x))$ for alle $x \in \left]0, \pi/2\right[$. Bestem længden af den del af grafen for f, hvor 1.–koordinaterne ligger mellem $\pi/4$ og a, for $a \in \left[\pi/4, \pi/2\right[$.

Facit: $\frac{1}{2}\ln(\tan(a))$.

Opgave 6. ($g(x) = \cos^2(x)$). Lad

$$f(x) = \frac{1}{2}\tan(x) - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\cos(x)\sin(x)$$

for alle $x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$. Bestem længden af den del af grafen for f, hvor 1.–koordinaterne ligger mellem $-\pi/3$ og $\pi/3$.

Facit: $\frac{9\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{6}$.

Matematik