Om differentiation af sinus-funktionen

Jens Peter Kristensen, Tommerup

Det er ikke fordi, jeg ikke tror, at Bjørn Grøn kan svare for sig selv. Men meningsudvekslingen om den korrekte måde at differentiere de trigonometriske funktioner, han startede i LMFK–bladets spalter nr. 3/2020 – og som medførte indlæg fra Jens Christian Larsen, Sorø Akademi i nr. 4/2020 – har så stor almen interesse, at vi andre i almindelighed vist må have lov til at blande os.

Bjørn er skeptisk overfor geometriske beviser for, at sinus er differentiabel, som dét i hans eget lærebogssystem (det bevis blev vist for øvrigt præsenteret af Anders Wamsler første gang i nyere tid, nemlig i LMFK–bladet 3/2012). Fx er der det galt, at cosinus indses at være kontinuert ved, at man bare afsætter længder af linjestykker på en cirkelbue. Desuden kan man ikke med overbevisning argumentere for gyldigheden af uligheden $\sin(x) < x < \tan(x)$ i en omegn til højre for 0 uden at anvende, at cirklens areal er $\pi \cdot r^2$. Og det kunne vi jo strengt taget ikke vide, før vi integrerer os til det, som gennemføres bl.a. ved at differentiere sinus... Alternativt opstiller Bjørn en analytisk definition af sinus, som den omvendte til arcsin(x). Jens Christian mener til gengæld ikke, at argumentet for kontinuiteten af de trigonometriske funktioner behøver at spille en central rolle i gymnasieundervisningen. Han mener tillige, at gyldigheden af den nævnte ulighed godt må bygge på viden om cirklens areal – formlen for det blev jo vist af Arkimedes for godt 2000 år siden.

Jeg er mest tilbøjelig til at give Jens Christian ret: Man kan til brug i gymnasiet udmærket holde sig til det geometriske bevis evt. med nogle kommentarer om blødgjorte, oprullede linjestykker – vi må endelig ikke strække dem.

Bjørn har nogle lidt hurtige slutninger om sinus' egenskaber på grundlag af sin definition baseret på kurvelængde, den analytiske. Jens Christian retter nogle mangler eller uklarheder, men mener desuden, at Bjørn løber ind i et uløseligt problem vedrørende funktionens differentiabilitet i sine ekstrema. Denne affærdigelse af konstruktionen er imidlertid ikke korrekt. Lad os se lidt nærmere på det: Længden af en bue af enhedscirklen fra (0, 1) til $(x, \sqrt{1-x^2})$, $x \in [0,1[$ er

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$$

Så arcsin defineres naturligvis som

$$\arcsin(y) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & y = -1 \\ \displaystyle\int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t & y \in \left]-1, 1\right[\\ \dfrac{\pi}{2} & y = 1 \end{cases}$$

Idet integranden er kontinuert og positiv i ethvert lukket interval i]–1, 1[, vil arcsin være kontinuert og voksende i [–1, 1]. Konstruktionen giver os, at arcsin er differentiabel i]–1, 1[med differentialkvotient $1/\sqrt{1-y^2}$, men af samme grund kan vi ikke udvide med højre–/venstre–differentialkvotienter i endepunkterne. Vi kan dog slutte, at grafen har lodrette halvtangenter i (–1, –π/2) og (1, π/2). Dette vender vi tilbage til om lidt.

Funktionen sin indføres i første omgang som den omvendte til arcsin, altså

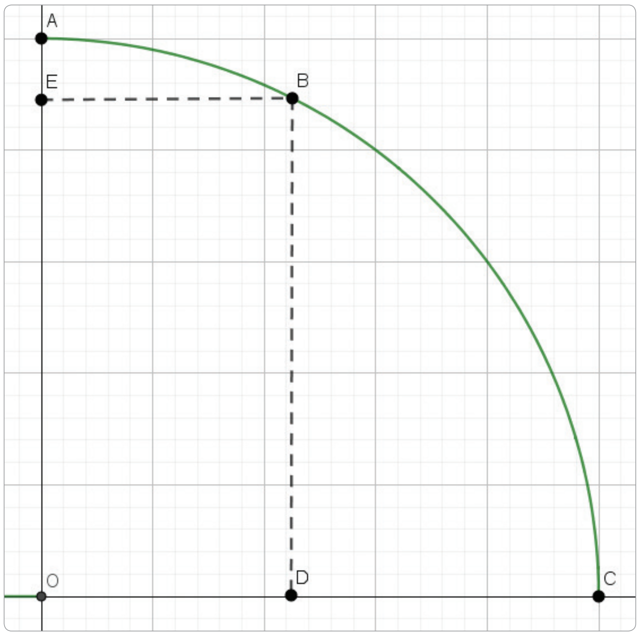
$$\sin(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \arcsin(y) = x$$

Den har dermed indtil videre definitionsmængden [–π/2, π/2], hvor den er voksende og kontinuert. Før vi går i gang med at differentiere, må vi hellere få cosinus defineret – for vi er jo i den analytiske tilgang startet helt forfra med de trigonometriske funktioner. Vi tager Bjørns definition:

$$\cos(x) := \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Bemærk, at Dm(cos) = [0, π], og at cos er aftagende og kontinuert.

På figuren er afsat den del af enhedscirklen med centrum i (0, 0), der ligger i 1. kvadrant.



Vi sætter $\widehat{AB} = x$, hvoraf følger, at $|OD| = \sin(x)$. Desuden må gælde, at $\widehat{BC} = \dfrac{\pi}{2} - x$, så

$$|OE| = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

Vi ser, at den her givne definition på cosinus giver de samme egenskaber som den geometriske definition. Herunder at

$$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$$

Alt her er vist i 1. kvadrant, men det er let at indse, at sin (x) som defineret ovenfor har de kendte egenskaber for $x\in\left[-\pi/2,0\right]$

– og at cos (x) blot defineres som cos (–x) for $x\in\left[-\pi/2,0\right]$.

For $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ sættes $\sin(x)=\sin(\pi-x)$.

På lignende måde kan man fortsætte ind i 3. kvadrant og får de velkendte periodiske bølgefunktioner med overgangsformler osv. Vi kan nu udvide sinus– og cosinusfunktionens definitionsmængde til hele $\mathbb{R}$.

Det er klart at betingelserne i sætningen om differentiation af omvendt funktion er opfyldt i $\left]-\pi/2,\pi/2\right[$ – Bjørn gennemgår alle detaljer i 3/2020–artiklen – så nu, hvor vi har godtgjort, at de velkendte relationer mellem sin og cos også gælder med den nye definition, har vi

$$\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[:\left(\sin(x)\right)'=\cos(x)$$

Da differentialkvotienten er kontinuert og konvergerer mod 0 for $x\to\pi/2_-$ vil sinusfunktionen være differentiabel fra venstre i $\pi/2$ med venstredifferentialkvotienten 0.

For $x\in\left]\pi/2,\pi\right[$ har vi, at $\sin(x)=\sin(\pi-x)$, så

$$\left(\sin(x)\right)'=-\cos(\pi-x)=-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos(x)$$

Nu kan vi argumentere på samme vis som ovenfor og får, at sin er differentiabel fra højre i $\pi/2$ med højre–differentialkvotient 0. Så sin – i Bjørns analytiske udgave – er differentiabel i ekstremumspunktet $x=\pi/2$ med differentialkvotienten 0. Ligeså med resten af ekstremumspunkterne.

Disse resultater – at differentialkvotientens konvergens er nok til, at (højre/venstre) differentialkvotienten eksisterer som konvergensværdien, samt at grafen for arcsin har lodrette halvtangenter – er en konsekvens af 2 sætninger, som findes i Kristensen & Rindungs bearbejdede udgave fra 1970'erne af den mere citerede Matematik 1, 2 og 3 fra 1960'erne. Nærmere bestemt skal man til Matematik 2.1, sætning 22.1 og 22.2 side 95–96 (2. udg. 1980). Resultatet findes ikke i 1960'er udgaven. Den sidste af sætningerne – den vigtigste – anføres uden bevis, men jeg tror nok, at matematiklærere vil være i stand at gennemføre ræsonnementet ud fra ideen i den første af de nævnte sætninger. Læg mærke til hvor fundamentalt et resultat det er.

Hvis vi vender os mod den kanoniske lærebogsforfatter på analyseområdet, Walter Rudin, så har han et droneperspektiv på K & R's sætning 22.2 med som et corollar til sætning 5.12 – her i min fordanskning: **Hvis f er differentiabel i [a, b], så kan f' ikke have diskontinuiteter af første slags i [a, b]**. (Principles of Mathematical Analysis, 2nd edition s 94). Jeg minder lige om, at "diskontinuitet af *første slags* i et punkt" betyder, at der ud over diskontinuiteten i punktet gælder, at funktionens grænseværdi fra højre og fra venstre eksisterer (kun én af dem i endepunkterne, selvfølgelig).

I en anden artikel i LMFK–bladet 4/2020 giver Jens Christian Larsen en udledning af differentiation af sinus med vektorfunktioner. Uden at påstå, at der er tale om et egentligt bevis. Her vil jeg indvende, at hvis man blot kalder $\left(\cos(t),\sin(t)\right)$ for den jævne cirkelbevægelse, så har man samtidig postuleret, at koordinatfunktionerne er differentiable – og det var jo det, vi ville vise... Lad os lige tage en kinematisk analyse af den jævne bevægelse på enhedscirklen: Vi sætter

$$\overrightarrow{OP_t}=\left(x(t),y(t)\right)$$

med $\overrightarrow{OP_0}=(1,0)$, og lader omløbsretningen være den positive. Da vi har krævet, at cirkelbevægelsen er jævn, betyder det, at farten, $\left|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OP_t}}{\mathrm{d}t}\right|$, er konstant – vi sætter den uden indskrænkninger til 1. Dvs. det følger, at koordinatfunktionerne må være differentiable. Da $\left|\overrightarrow{OP_t}\right|=1$ får vi, som Jens Christian, at $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OP_t}}{\mathrm{d}t}\perp\overrightarrow{OP_t}$. Og vi kan slutte, at

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OP_t}}{\mathrm{d}t}=\left(-y(t),x(t)\right)$$

$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OP_t}}{\mathrm{d}t}$ er hermed i sig selv en jævn cirkelbevægelse i positiv omløbsretning, blot med start i (0, 1). Vi kan nu gentage argumentationen ovenfor og får at

$$\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OP_t}}{\mathrm{d}x^2}=\left(-x(t),-y(t)\right)$$

eller

$$x''(t)=-x(t)\ \wedge\ x(0)=1\ \wedge\ x'(0)=0$$
$$y''(t)=-y(t)\ \wedge\ y(0)=0\ \wedge\ y'(0)=1$$

Det er ikke nogen stor overraskelse, at ligningssystemet har den entydige løsning

$$x(t)=\cos(t)\ \wedge\ y(t)=\sin(t)$$

Dette her bygger naturligvis på, at cos og sin er differentiable med kendte differentialkvotienter. Så det skal vi altså vide, før vi kan beskrive den jævne cirkelbevægelse med dem.