# Hvor mange brøker kan forkortes?

Jan Boddum Larsen, HC Ørsted Gymnasiet

Laver man en primtalsfaktorisering af tæller og nævner, så vil en brøk kunne forkortes, hvis tæller og nævner har en fælles primtalsfaktor.

Det ville være nærliggende at tro, at når tallene bliver store nok, vil sandsynligheden for at brøken kan forkortes nærme sig 1. Det er dog ikke tilfældet.

Hvis man har en brøk $A/B$, der kan forkortes, så vil brøken $B/A$ også kunne forkortes. Det betyder, at det kun er nødvendigt at se på de brøker, hvor tælleren ikke er større end nævneren.

Sandsynligheden, for at 2 går op i tælleren, er 1/2, men der er også en nævner, hvor sandsynligheden også er 1/2. Det betyder, at sandsynligheden, for at brøken kan forkortes med 2, er

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

Analogt til det er sandsynligheden, for at brøken kan forkortes med 3, lig

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

Sandsynligheden, for at brøken kan forkortes med 3 men ikke med 2, er

$$\frac{1}{9}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)$$

altså sandsynligheden for at brøken kan forkortes med 3, ganget med sandsynligheden for, at brøken ikke kan forkortes med 2.

En brøk lader sig forkorte med 2 eller 3 med sandsynligheden

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)$$

Ved at videreføre denne argumentation vil man ende op med følgende udtryk for sandsynligheden for at forkorte en brøk:

$$F=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{25}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{49}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{25}\right)+\dots$$

Det vil man også kunne skrive som:

$$F=\frac{1}{4}+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{p_i^2}\cdot\prod_{k=1}^{i-1}\left(1-\frac{1}{p_k^2}\right)$$

hvor $p_i$ er det $i$'te primtal.

Det ses, at der altid adderes et positiv led til summen, hvilket gør, at en afsnitssum altid vil være mindre end $F$ for alle $n$.

$$F_u(n)=\frac{1}{4}+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{p_i^2}\cdot\prod_{k=1}^{i-1}\left(1-\frac{1}{p_k^2}\right)$$

Dette er et udtryk for afsnitssummen. Så vi ved nu, at der altid gælder følgende:

$$F>F_u(n)$$

Således er $F_u(1)=\frac{1}{4}$ og $F_u(2)=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{3}$.

Jo større $n$, man vælger, desto tættere på $F$ kommer afsnitssummen.

Det næste vil være at undersøge, om man kan lave en øvre grænse. Vi starter med at se på den uendelige række:

$$F=\frac{1}{4}+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{p_i^2}\cdot\prod_{k=1}^{i-1}\left(1-\frac{1}{p_k^2}\right)<\frac{1}{4}+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{p_i^2}$$

Vi ved, at $\left(1-\frac{1}{p_k^2}\right)<1$ for alle $k$ og $p_2=3$.

Da summen af primtal er mindre end summen af alle tal, vil det gælde, at:

$$\frac{1}{4}+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{p_i^2}<\frac{1}{4}+\sum_{i=3}^{\infty}\frac{1}{i^2}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}-1$$

Denne række kender vi og ved, at $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Ergo får vi følgende øvre grænse

$$F_o(1)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}-1=\frac{\pi^2}{6}-1\approx 0{,}64494$$

Det betyder, at sandsynligheden, for at en brøk kan forkortes, er mindre end 0,64494. Det betyder også, at sandsynligheden for, at en brøk kan forkortes, må være i intervallet

$$F_u(1)<F<F_o(1)\quad\text{eller}\quad 0{,}25<F<0{,}64494$$

Ovenfor så vi, at vi kan få afsnitssummen tættere på $F$ ved at gøre $n$ større (ovenfor er $n$ lig 1).

Den øvre grænse kan man også få tættere på $F$ ved at starte summen senere:

Hvis $l>2$, vil man kunne skrive rækken som:

$$F=\frac{1}{4}+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{p_i^2}\cdot\prod_{k=1}^{i-1}\left(1-\frac{1}{p_k^2}\right)=F_u(l-1)+\sum_{i=l}^{\infty}\frac{1}{p_i^2}\cdot\prod_{k=1}^{i-1}\left(1-\frac{1}{p_k^2}\right)$$

Der gælder følgende, da $\left(1-\frac{1}{p_k^2}\right)<1$ for alle *k*:

$$F_u(l-1)+\sum_{i=l}^{\infty}\frac{1}{p_i^2}\cdot\prod_{k=1}^{i-1}\left(1-\frac{1}{p_k^2}\right)$$
$$<F_u(l-1)+\sum_{i=l}^{\infty}\frac{1}{p_i^2}\cdot\prod_{k=1}^{l-1}\left(1-\frac{1}{p_k^2}\right)$$

Med de samme argumenter som tidligere vil der gælde følgende:

$$F_u(l-1)+\sum_{i=l}^{\infty}\frac{1}{p_i^2}\cdot\prod_{k=1}^{l-1}\left(1-\frac{1}{p_k^2}\right)$$
$$<F_u(l-1)+\sum_{i=p_l}^{\infty}\frac{1}{i^2}\cdot\prod_{k=1}^{l-1}\left(1-\frac{1}{p_k^2}\right)$$

Summen omskrives og følgende fremkommer:

$$F_u(l-1)+\sum_{i=p_l}^{\infty}\frac{1}{i^2}\cdot\prod_{k=1}^{l-1}\left(1-\frac{1}{p_k^2}\right)$$
$$=F_u(l-1)+\prod_{k=1}^{l-1}\left(1-\frac{1}{p_k^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}-\sum_{i=1}^{p_l-1}\frac{1}{i^2}\right)$$

Følgende vil derfor være en øvre grænse for alle *l*:

$$F_o(l)=F_u(l-1)+\prod_{k=1}^{l-1}\left(1-\frac{1}{p_k^2}\right)\left(\frac{\pi^2}{6}-\sum_{i=1}^{p_l-1}\frac{1}{i^2}\right)$$

Ved at se på alle primtal op til 100 (der er 25 i alt og 97 er det sidste) fås:

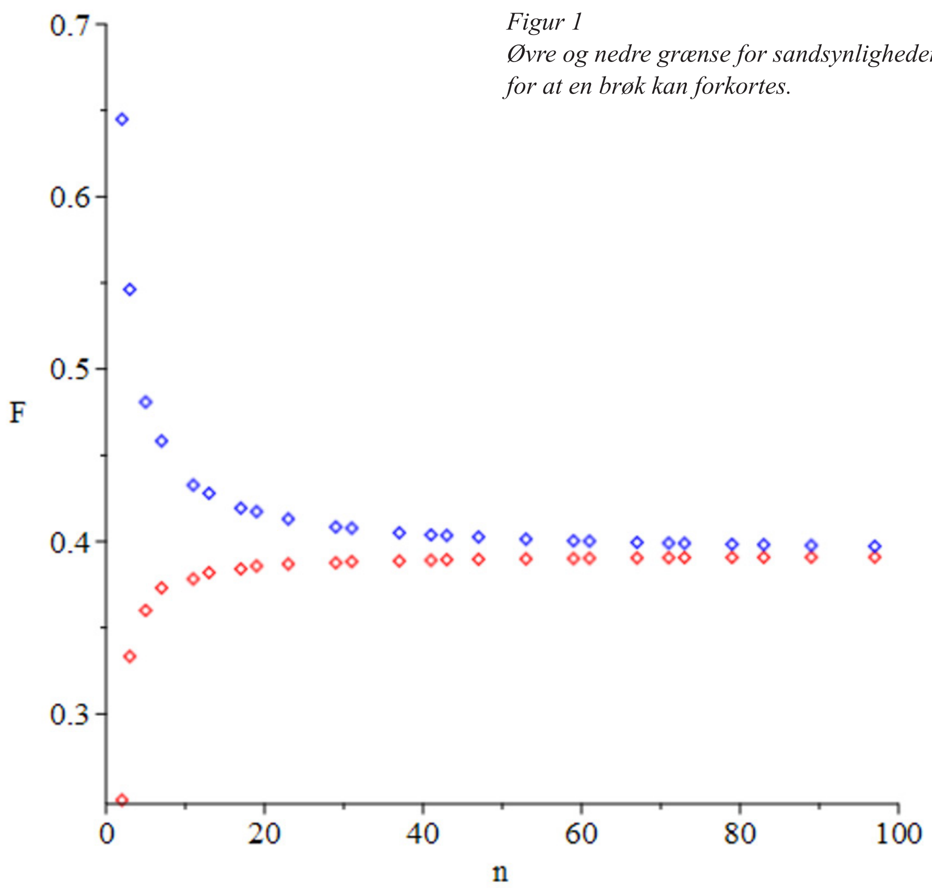
$$F_u(25)<F<F_o(25)$$

Hvilket er beregnet til:

$$0{,}39096<F<0{,}39722$$

Ud fra det finder man, at sandsynligheden, for at en brøk kan forkortes, er:

$$F=0{,}394\pm 0{,}003$$




*Figur 1*
*Øvre og nedre grænse for sandsynligheden for at en brøk kan forkortes.*