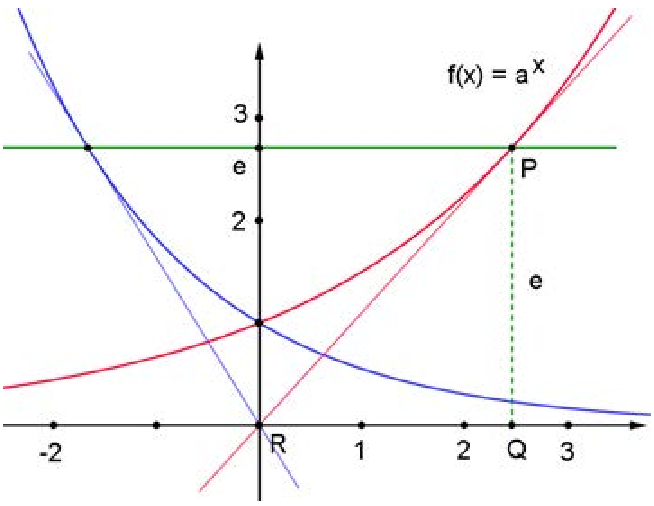
Eksponentialfunktionerne – en egenskab

JENS CARSTENSEN, Frederiksberg

Er det mon velkendt for alle, at enhver eksponentialfunktion $f(x) = a^x$ har den egenskab, at tangenten til grafen i punktet P med y–koordinaten e går gennem nulpunktet (0, 0)?



Det er selvfølgelig ikke svært at bevise. Vi har, at

$$f(x) = \mathrm{e} \quad \Leftrightarrow \quad a^x = \mathrm{e} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{\ln a}$$

så P har koordinaterne $\left(\frac{1}{\ln a},\ \mathrm{e}\right)$. Da $f'(x) = a^x \cdot \ln a$ og $a^x = \mathrm{e}$, er

$$f'(\frac{1}{\ln a}) = \mathrm{e} \cdot \ln a$$

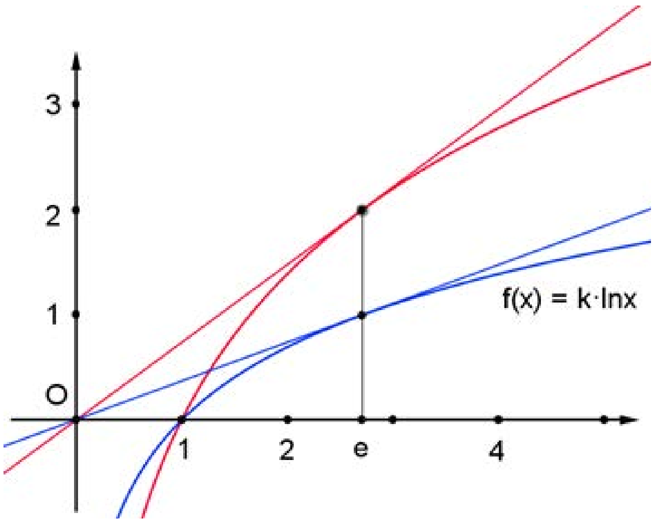
Lad tangenten skære x–aksen i R og lad projektionen af P på x–aksen være Q. Da tangentens hældning er $\mathrm{e} \cdot \ln a$, er

$$\mathrm{e} \cdot \ln a = \frac{PQ}{QR} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e} \cdot \ln a = \frac{\mathrm{e}}{QR} \quad \Leftrightarrow \quad QR = \frac{1}{\ln a}$$

Altså er QR netop x–koordinaten til P, så R falder i (0, 0). Hvis $0 < a < 1$, skal QR regnes negativ.

Man kan også formulere egenskaben sådan: Hvis man fra (0, 0) trækker en tangent til grafen for en eksponentialfunktion $f(x) = a^x$, har røringspunktet y–koordinaten e.

Ved spejling i linjen $y = x$ fås den tilsvarende egenskab for graferne for logaritmefunktionerne: Hvis man fra (0, 0) trækker en tangent til grafen for en logaritmefunktion $f(x) = k \cdot \ln x$, har røringspunktet x–koordinaten e.



Henvisning

Jens Carstensen: *Gymnasiematematik – et par notitser* (MatematikMagasinet 3, April 2003).