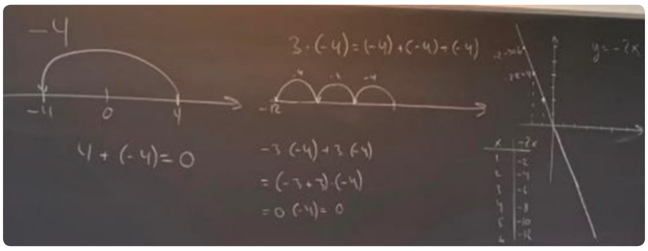
se punkter på en ret linje, og eleverne kunne intuitivt fornemme, at linjen *”måtte fortsætte”* over i 2. kvadrant, hvor punkterne har negative *x*–koordinater og positive *y*–koordinater.

Desuden gav læreren en forklaring gennem et aritmetisk eksempel, hvor definitionen af et negativt tal og den distributive lov blev benyttet.



Fornemmelsen var, at der kun var et fåtal af eleverne, der var i stand til at forstå dette ræsonnement i sin helhed, og timen efterlod derfor mange spørgsmål hos eleverne. Af tidsmæssige årsager var det ikke muligt at dvæle længere tid ved dette, men det kunne have været interessant at få en elev til at gentage forklaringen.

Til sidst kan det nævnes, at denne lektion blev afholdt i to forskellige klasser med to ugers mellemrum. Til den anden gennemførelse af lektionen havde vi besluttet os for at begynde og afslutte lektionen med tre små opgaver af typen $(-2)\cdot 4$ og $6\cdot(-3)$ samt $(-4)\cdot(-3)$ for hurtigere at spore eleverne ind på, hvilken regel det var de skulle begrunde. Det viste sig, at selve multiplikationen med to tal ikke voldte problemer, i hvert fald ikke når opgaverne blev stillet på denne måde. Således vandt vi herved noget tid, men til gengæld var der nogle interessante diskussioner, der gik tabt, omkring hvilke regneoperationer formuleringen *”minus og minus giver plus”* gemmer på.

Hvor mange æbler ligger i bunken?

Jeanette Marie Axelsen, Midtsjællands Gymnasium Ringsted

Residualer, residualplot og mindste kvadraters metode kan let bare blive til black–box–kommandoer i et CAS–værktøj, og fornemmelsen for hvordan den bedste rette linje lægges ind i et punktplot, og hvad der i det hele taget menes med bedste linje, kan let gå tabt. Så målet for lektionen, som er planlagt og gennemført i to 1.g–klasser på MSG i Ringsted i 1. cyklus ud af 4 i alt, er at forstå betydningen af bedste rette linje.

Ud over at eleverne skal nå frem til, at en måde at vurdere den bedste rette linje er ved hjælp af den lodrette afstand mellem datapunkt og modelpunkt, så er det at kunne tegne og dimensionere et koordinatsystem og indtegne punkter fra en tabel et sekundært mål. Dette er noget rigtig mange elever har svært ved, så derfor er det også et fagligt mål for lektionen at få trænet dette.

Eleverne gives problemstillingen:

> *På Roskilde Dyrskue er der en stand fra Pi Mosteri, hvor man har slået en konkurrence op, der går ud på, at man skal gætte, hvor mange æbler der ligger i bunken, når det oplyses, at der i bunken ligger 100 kg æbler. Den der kommer tættest på antallet, vinder en ny cykel.*

Som hjælp får man oplysningerne vist i tabellen nedenfor:

Navn	Dennis	Mette	Lotte	Bo	Kaj
Antal (stk.)	5	10	15	20	1
Vægt (gram)	1000	1100	2400	2500	100

Eleverne bliver bedt om at svare på spørgsmålet uden brug af CAS men gerne med brug af en lommeregner sammen med papir og blyant. De får ca. 10 minutter til at finde et bud samt at skrive deres tankegang bag buddet på en planche, som skal præsenteres for resten af klassen.

I planlægningsfasen brugte teamet det meste af tiden på at afprøve forskellige datasæt, så der blev nogle oplagte forskellige tilgange for eleverne som fx at tage gennemsnittet af alle æblerne, at tage udgangspunkt i Kajs ene æble eller at bestemme hældningen for den rette linje gennem to punkter fra tabellen og sætte $b = 0$. Dog blev realistiske data skrinlagt efter at have prøvet at veje æbler købt i et supermarked, da det viste sig, at de vejede det samme. Og M&M's med peanuts havde for lille variation. Så det endte med det konstruerede sæt vist ovenfor. Dernæst var opgaven at finde en kontekst, hvor man kunne have behov for at finde et estimat for vægten af ét æble baseret på et datasæt men givet i en åben problemstilling, så eleverne fik mulighed for at arbejde undersøgende.

Små detaljer kan gøre en stor forskel

Ved gennemprøvningen i de to klasser blev det klart, at det forløb, lektionen indgår i, påvirker elevernes tilgang til problemet. Oprindeligt skulle lektionen afvikles i 1.y to uger efter afviklingen i 1.x med en mellemliggende periode til justeringer af lektionen på baggrund af det reflekterende møde efter 1. runde. Men pga. covid–19 i 1.y blev klassen hjemsendt i en uge, og dermed blev lektionen udskudt yderligere 2 uger. På dette tidspunkt havde klassen nu som emne deskriptiv statistik, og flere af de tilgange, vi observerede i 1.x, blev ikke berørt overhovedet i 1.y. Her var alt tunet ind på gennemsnit – også selvom de stod med en tabel, der kaldte mere på lineær regression.

En anden detalje med betydning var, at vi efter 1. gennemprøvning i teamet blev enige om, at der skulle lægges mm–papir ud til eleverne med det samme. Dette glemte læreren i 1.y, så det var endnu en mulig årsag til, at eleverne ikke fik ideen at lave regression på punkterne. Og dertil kom, at eleverne op til lektionen havde haft et modul i matematik, og pga. covid–19 skulle der skiftes lokale, så der kunne være god plads til både elever og observatører. I forbindelse med lokaleskiftet havde flere elever spurgt, om de skulle medbringe computere men havde fået beskeden, at dem skulle de ikke bruge i den kommende lektion, hvorved tanken om regression ikke lå lige for, da de indtil dette punkt i grundforløbet kun havde lavet regression i deres CAS–værktøj.

Det vindende argument

At nå hen til mindste kvadraters metode var med elevernes tilgang til datasættet et ambitiøst mål. Også fordi der gik tid med at tegne et koordinatsystem og finde en linje igennem. Men elevernes diskussioner var interessante at iagttage undervejs, fx hvordan de skulle tegne koordinatsystemet, og hvad skulle være ud ad akserne. De ræsonnerede sig i de fleste tilfælde frem til det rigtige, og den læring det gav havde betydning. Men den sociale dynamik i flere grupper både ved første og anden afprøvning betød, at det ikke altid var det matematisk mest korrekte argument, der fik lov at vinde som gruppens endelige svar, hvis det kom fra en elev i gruppen med lav social status i klassen. Ved præsentationerne i 1. runde var et argument også *"Det der ser mest enkelt ud, så det må være den rigtige løsning"*, eller *"Det ser mest matematisk avanceret ud, så det må være korrekt"*. For eleverne er der ikke tale om at forstå de andres præsentationer, men hvad der lige føles som det korrekte. Måske er det meget sigende, når en elev siger til en af sine kammerater i gruppen *"Det' bare matematik. Det er ikke noget vi skal forstå"*.

Elevernes motivation for at finde svaret på, hvor mange æbler der ligger i bunken, gav et højt aktivitetsniveau i klassen. En elev udbrød *"Findes der et rigtigt svar?"*. Dette er et interessant spørgsmål, fordi svaret er jo, at uanset hvordan vi kommer frem til vægten pr. æble, så vil det altid kun være et estimat. Så hele modelleringsaspektet kommer ind som et bedste bud på det rigtige antal og dermed vinde konkurrencen. Det kan være et godt udgangspunkt for en snak om matematisk modellering. Det eneste rigtige svar opnås jo her kun ved at tælle æblerne i den konkrete bunke æbler.

Lektionen har givet anledning til en opfølgning på, hvad der menes med, at den samlede afstand til punkterne fra regressionslinjen skal være mindst. De fleste ved, at den vinkelrette afstand er den korteste, så hvorfor regner vi så her med den lodrette afstand? Og hvorfor kvadrerer vi residualerne? Hvorfor ikke bare kigge på afstandene numerisk? En elev konstaterede også, at når vi laver regression, så bliver konstantleddet $b \neq 0$. Så hele den sproglige repræsentation af konstanterne bliver udfordret i modelleringen. Og vil den bedste rette linje ikke være den, hvor $b = 0$?

I forhold til Team–Ringsteds forberedelse af næste cyklus er et vigtigt bidrag fra første cyklus vigtigheden af konteksten som motivation eller for at skabe en nysgerrighed efter at finde et svar. Vi kunne tænke os at undersøge nærmere, hvordan vi kan arbejde med at få eleverne til at formulere svar i endnu højere grad, så læreren egentlig bare faciliterer processen. Som en af gæsteobservatørerne bemærkede, så var det altid læreren, der opsummerede et elevindlæg. Hvorfor ikke bede en af de andre elever om at opsummere det sagte? Det vil tvinge en kultur frem, hvor eleverne i endnu højere grad er nødt til at sætte sig ind i, hvad det er de andre elever siger ved en fremlæggelse, men også at tale sammen om matematik med matematik.