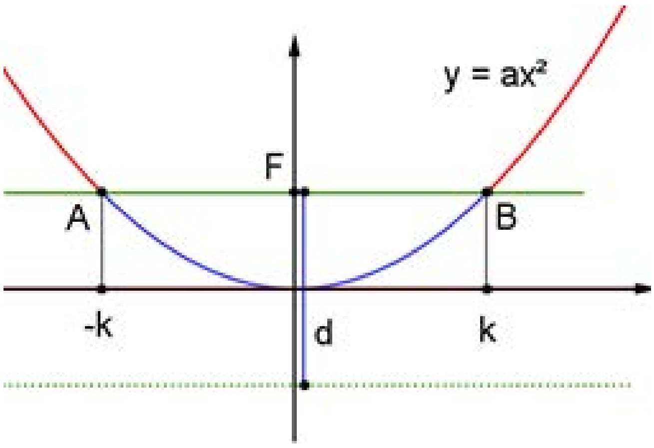
Den universelle parabolske konstant

Jens Carstensen, Frederiksberg & Alija Muminagić, Frederiksberg

Som bekendt er forholdet mellem længden af en halvcirkelbue og dens radius r konstant, nemlig π, som man kunne kalde *den universelle cirkulære konstant*.

For en parabel gælder noget lignende. Parablen med ligningen $y = ax^2$ har brændpunkt i $F\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ og ledelinjen har ligningen $y = -\frac{1}{4a}$. En vandret linje gennem F skærer parablen i A og B og desuden har F afstanden $d = \frac{1}{2a}$ fra ledelinjen. Det viser sig nu, at forholdet mellem længden af parabelbuen mellem A og B og længden d er konstant, dvs. uafhængig af a. Denne konstant kaldes *den universelle parabolske konstant*.



Punkterne A og B har x–koordinaterne $-k$ og k, hvor

$$ak^2 = \frac{1}{4a} \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{1}{2a}$$

Længden b af parabelbuen mellem A og B får vi af formlen

$$b = \int_{-k}^{k} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, \mathrm{d}x = 2\int_0^k \sqrt{1 + (2ax)^2}\, \mathrm{d}x$$

Vi foretager substitutionen

$$t = 2ax,\ \ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2a},\ \ x = 0 \ \Leftrightarrow\ t = 0,\ x = k \ \Leftrightarrow\ t = 2ak$$

så

$$b = 2\int_0^{2ak} \sqrt{1+t^2}\, \frac{1}{2a}\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int_0^{2ak} \sqrt{1+t^2}\, \mathrm{d}t$$

Opslag i en integraltabel giver

$$\int \sqrt{c^2 + x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \tfrac{1}{2}x\sqrt{c^2+x^2} + \tfrac{1}{2}c^2 \ln\left(x + \sqrt{c^2+x^2}\right)$$

så vi for $c = 1$ får

$$b = \frac{1}{a}\left[\tfrac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} + \tfrac{1}{2}\ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)\right]_0^{2ak}$$
$$= \frac{1}{a}\left(\tfrac{1}{2}\cdot 2ak\sqrt{1+4a^2k^2} + \tfrac{1}{2}\ln\left(2ak + \sqrt{1+4a^2k^2}\right)\right)$$

Idet $2ak = 1$ og $4a^2k^2 = 1$, får vi

$$b = \frac{1}{a}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$$

og dermed er det søgte forhold

$$\frac{b}{d} = 2a \cdot \frac{1}{a}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$$
$$= \sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right) \approx 2{,}295587$$

De andre keglesnit, ellipse og hyperbel har ikke en lignende universel konstant, fordi deres form foruden af parametrene a og b (halvakserne) desuden afhænger af excentriciteten. I virkeligheden er altså alle parabler ligedannede.

Henvisning

mathworld.wolfram.com (universal parabolic constant)

Gennem mere end 40 år har jeg samlet litteratur med matematikopgaver af den type, der optræder i Opgavehjørnet. De stammer fra olympiader og andre matematikkonkurrencer fra hele verden og findes i form af bøger og indbundne udskrifter fra nettet.

Det ville gøre mig ondt, hvis denne samling skulle ende på forbrændingen, og derfor søger den en eller flere nye ejere, der med tiden gratis vil overtage den helt eller delvist.

Interesserede kan henvende sig på jens.carstensen@newmail.dk. I er naturligvis velkomne til at møde op og se på herlighederne på min adresse på Frederiksberg.

Jens Carstensen, Frederik VI Allé 10, 2000 Frederiksberg.