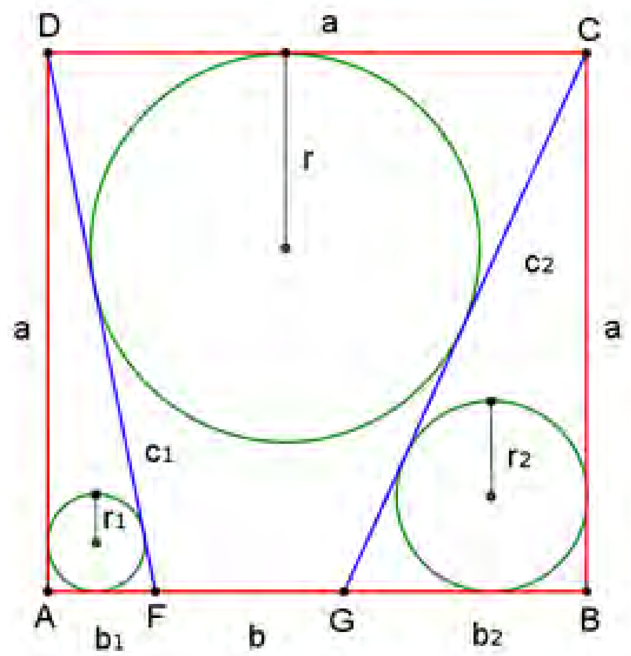
Sangaku – japansk tempelgeometri

Jens Carstensen, Frederiksberg

I sin bog *Japanese Temple Geometry Problems* skriver forfatteren:

> *I størstedelen af Edo–perioden (1603 – 1867) var Japan næsten fuldstændig afskåret fra omverdenen. Bøger om matematik må have været sjældne og alligevel frembragte personer fra alle sociale klasser sætninger i Euklidisk geometri, som er bemærkelsesværdigt anderledes end dem, der blev opdaget i vesten i samme periode.*
>
> *Disse sætninger blev ikke offentliggjort i bøger, men som smukt farvelagte tegninger på træplader, der blev ophængt under taget i et tempel eller en helligdom.*
>
> *…En sans for form og en påskønnelse af naturlig skønhed har altid været karakteristisk for det japanske folk, og det er derfor ikke mærkeligt, at geometrien tiltrækker på grund af sin skønhed og den uafvendelighed, der ligger i dens konstruktioner og sætninger, og at den har overbevist sine udøvere om, at geometri var et emne, der var værdigt at præsentere for guderne.*
>
> *…Pladerne kunne indeholde fem eller seks sætninger, der næsten altid var smukt farvelagt.…Beviser for de illustrerede sætninger optrådte sjældent.*

Vi skal her med bevis angive en elegant sætning fra en sådan træplade – en såkaldt *Sangaku*.



Opgave. □*ABCD* er et kvadrat med sidelængde *a*, og *F* og *G* er to vilkårligt valgte punkter på *AB*. De indskrevne cirkler i

Matematik

ΔAFD og ΔBCG har radier r_1 og r_2, og cirklen, der tangerer CD, CG og DF, har radius r. Vis, at

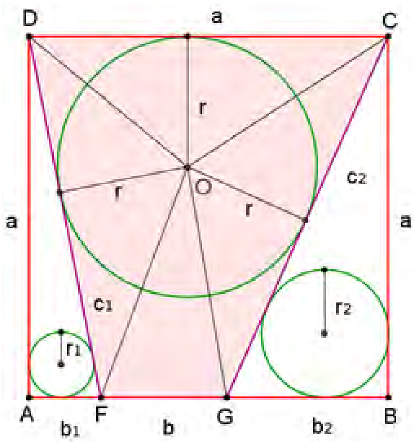
$$\frac{1}{r}=\frac{1}{a-2r_1}+\frac{1}{a-2r_2}$$

Løsning. For nemheds skyld sætter vi

$$b=FG,\ c_1=DF,\ c_2=CG,\ b_1=AF \text{ og } b_2=GB$$

Vi ser på trapezet $FGCD$ med cirklen, der tangerer CD, CG og DF. Cirklens centrum O forbindes med C, D, F og G. Trapezets højde er a, så dets areal er

$$[CDFG]=\tfrac{1}{2}a(CD+FG)=\tfrac{1}{2}a(a+b)$$



På den anden side er arealet summen af de fire trekanters arealer:

$$[CDFG]=[\Delta CGO]+[\Delta CDO]+[\Delta DFO]+[\Delta FGO]$$

$$=\tfrac{1}{2}c_2\cdot r+\tfrac{1}{2}a\cdot r+\tfrac{1}{2}c_1\cdot r+\tfrac{1}{2}b\cdot(a-r)$$

Altså får vi

$$a(a+b)=r(c_1+c_2+a-b)+ab \quad\Leftrightarrow\quad a^2=r(c_1+c_2+a-b)$$

Vi ser, at $a-b=b_1+b_2$, så

$$a^2=r(c_1+c_2+b_1+b_2)\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{r}=\frac{b_1+b_2+c_1+c_2}{a^2} \qquad (1)$$

I den retvinklede ΔAFD gælder, at diameteren i den indskrevne cirkel er summen af kateternes længder minus hypotenusens længde, så

$$r_1=\tfrac{1}{2}(a+b_1-c_1)$$

hvoraf

$$a-2r_1=a-a-b_1+c_1=c_1-b_1$$

Så giver Pythagoras

$$\frac{1}{a-2r_1}=\frac{1}{c_1-b_1}=\frac{c_1+b_1}{c_1^2-b_1^2}=\frac{c_1+b_1}{a^2}$$

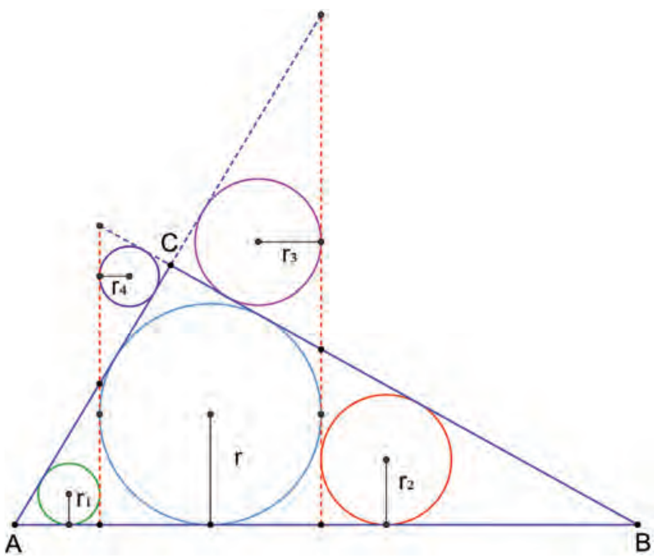
På samme måde er

$$\frac{1}{a-2r_2}=\frac{c_2+b_2}{a^2}$$

Ved hjælp af (1) får vi endelig

$$\frac{1}{a-2r_1}+\frac{1}{a-2r_2}=\frac{c_1+b_1+c_2+b_2}{a^2}=\frac{1}{r}$$

Uden bevis nævner vi en af de mange andre smukke Sangaku:



Opgave. I ΔABC har den indskrevne cirkel radius r. Forlængelserne af siderne AC og BC ud over C skærer tangenterne vinkelret på siden AB som vist. De indskrevne cirkler med radier r_1, r_2, r_3 og r_4 i de små trekanter tegnes. Vis, at $r_1r_3=r_2r_4$.

Henvisninger

Hidetoshi Fukagawa & Dan Pedoe: *Japanese Temple Geometry Problems, Sangaku*, The Charles Babbage Research Centre, Winnipeg, Canada, 1989.
Hidetoshi Fukagawa & John Rigby: *Traditional Japanese Mathematics Problems of the 18th and 19th Centuries*, SCT Publishing, Singapore, 2002.
Géry Huvent: *Sangaku, le mystère des énigmes géometriques japonaises*, Dunod, Paris, 2008.
Hidetoshi Fukagawa & Tony Rothman: *Sacred Mathematics, Japanese Temple Geometry*, Princeton University Press, Princeton, 2008.
MatematikMagasinet nr. 34, 52, 55, 56, 61, 84, 86.