En udledning af differentiation af sinus og cosinus
Med vektorfunktioner

JENS CHRISTIAN LARSEN, Sorø Akademis Skole

I det følgende vil jeg skitsere en udledning af differentiation af sinus og cosinus, som er baseret på vektorfunktioner. Det er med vilje, at jeg anvender ordet udledning og ikke bevis, da argumentationen måske har nogle mangler. Disse mangler behandles til sidst. Undervejs vil jeg tillade mig at skrive vektorer som fx (x, y). Det burde være klart af konteksten, hvad der menes.

For at kunne begynde på udledningen af differentiation af sinus og cosinus, bør vi definere, hvad der menes med de to funktioner i en vektorfunktionskontekst. Vi giver følgende definition, der er en omskrivning af den almindelig kendte.

Definition: Lad $\gamma(t)$ være en kurvelængdeparametrisering af enhedscirklen med positiv omløbsretning, og med $\gamma(0) = (1, 0)$. Den første koordinatfunktion kaldes cosinus, og skrives cos. Den anden koordinatfunktion kaldes sinus, og skrives sin.

Bemærk, at der ikke antages noget om kontinuitet eller differentiabilitet af γ.

Antag, at $p(t) = (x(t), y(t))$ er en glat/differentiabel parametrisering af enhedscirklen med $p(0) = (1, 0)$. Så gælder:

$$(x(t))^2 + (y(t))^2 = 1$$

Hvis der differentieres på begge sider med kædereglen:

$$2x(t)\cdot x'(t) + 2y(t)\cdot y'(t) = 0$$

Dermed er $p'(t)$ ortogonal på $p(t)$. Det vil sige, at $p'(t)$ er parallel med tværvektoren til $p(t)$, og der findes en funktion k, så $p'(t) = k(t)\cdot(-y(t), x(t))$.

Hvis vi endvidere antager, at p har enhedshastighed $|p'(t)| = 1$, så får vi:

$$1 = |p'(t)| = |k(t)|\sqrt{(-y(t))^2 + (x(t))^2} = |k(t)|$$

Kvadratroden giver 1, da vi er på enhedscirklen. Dermed har vi $k(t) = \pm 1$, for alle t. Hvis vi antager, at p har positiv omløbsretning, så gælder $k(t) = 1$ for alle t.

Vi har nu vist, at

$$x'(t) = -y(t) \quad \text{og} \quad y'(t) = x(t)$$

når p opfylder de antagelser, vi har gjort os oven over.

Men vi kan vise, at p er parametriseret med kurvelængde:

$$s(t) = \int_0^t |p'(u)|\,\mathrm{d}u = \int_0^t 1\,\mathrm{d}u = t - 0 = t$$

Så kurvelængden er netop vores parameter t. Men en parametrisering af enhedscirklen, der opfylder alle de egenskaber, p har, er netop definitionen på sinus og cosinus, så vi har

$$x(t) = \cos(t) \quad \text{og} \quad y(t) = \sin(t)$$

samt

$$\cos'(t) = -\sin(\mathrm{t}) \quad \text{og} \quad \sin'(t) = \cos(t)$$

Hvorfor kun en udledning?

I det ovenstående har vi påstået eksistensen af en vektorfunktion p, og vi har lavet en række antagelser om den. Vi har vist, at dens koordinatfunktioner skal være sinus og cosinus. Men antagelsen om, at den er glat/differentiabel, har vi ikke eftervist. Således har vi kun vist: Hvis der findes en glat vektorfunktion, så gælder der…

Hvis vi accepterer, at sinus og cosinus eksisterer, så er det nok at vise, at de er kontinuerte. Analysens fundamentalsætning, vil så sikre differentiabilitet, da vi kender deres stamfunktioner.

Alternativt kan vi rent formelt opskrive taylorpolynomierne for de to funktioner. Deres konvergensradius kan så undersøges, og det burde give os to veldefinerede funktioner. Fordelen ved denne tilgang er, at der knyttes en geometrisk forklaring til to rækker, der ellers kan virke ret vilkårlige.

En sidste bemærkning er, at den udledning, der er lavet, faktisk kun anvender to egenskaber fra enhedscirklen. Nemlig, at radius er 1, og at enhedscirklen går igennem (1,0). Dermed anvendes der ikke noget yderligere, som fx omkreds eller areal af en cirkel.