Geometri eller analyse?

Kommentar til Bjørn Grøns: Differentiation af sinus

Jens Christian Larsen, Sorø Akademis Skole

Bjørn Grøn har en artikel i LMFK–bladet 3/2020 om problematiske beviser for differentiation af sinus. I artiklen har han nogle overvejelser over, hvordan argumenter for denne differentiation kan eller skal opbygges. En diskussion, som på mange måder er interessant, og egentlig rører ved det, vi kan nå i undervisningen, og det vi gerne vil vise i undervisningen. Når vi beviser differentiation af sinus, så kan vi vel egentlig enten opfatte sinus som noget, der er defineret i geometrien eller som noget, der defineret analytisk. Hvis vi opfatter sinus geometrisk, så giver det mening at lave et geometrisk bevis, hvor der tages udgangspunkt i den geometriske definition af sinus og cosinus. Til gengæld, hvis vi vil lave analyse, så bliver de geometriske overvejelser uheldige, fordi de ikke knytter an til en ren analytisk behandling af de foreliggende funktioner. Det er klart, at Grøn søger en ren analytisk tilgang til sinus og cosinus.

Noget af det første Grøn angriber, er manglende argumenter for kontinuitet af sinus og cosinus. Men også, hvad der forekommer at være mere centralt for Grøn, spørgsmålet om hvordan vi kan finde en buelængde? Det sidste spørgsmål vender jeg tilbage til.

Spørgsmålet om manglende argumentation for kontinuitet er for mig at se ikke noget særligt stort problem, set ud fra et undervisersynspunkt. Vi kan ikke nå at give andet end en overfladisk gennemgang af kontinuitet, så vores elever skal vide, at det er vigtigt for at kunne være sikre på eksistensen af de grænser, vi anvender i fx beviset for differentiation af sinus.

Grøn gennemgår to klassiske beviser. Han behandler den måde grænsen $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$ bliver bevist. Blandt andet ved hjælp af arealer, hvor der undervejs anvendes, at arealet af enhedscirklen er π. Det får ham til at spørge, hvor fra det vides, at πr^2 er arealet af en cirkel? Grøn angiver, at vi ved dette fra integralregning, hvor vi netop undervejs differentierer sinus, og dermed laver en cirkelslutning. Hvis vi laver analyse, så er det en reel anklage. Men det er geometriske beviser, der angribes, og her glemmer Grøn vist Arkimedes, som viste sætningen for noget tid siden. Man kan mene, hvad man vil om Arkimedes' bevis, men når der laves et geometrisk bevis for differentiation af sinus, så giver det vel mening at anvende geometriske argumenter for de "huller" der måtte være. Jeg kan ikke acceptere, at der skulle være en cirkelslutning her.

Grøns bevis

Bjørn Grøn foreslår så en definition af sinus baseret på kurvelængde. Faktisk definerer han arcsin, ved hjælp af et integral:

$$\arcsin(y)=\int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t,\quad y\in[0;1[$$

At definitionsmængden ikke er]–1; 1[kan undre. Sinus defineres som den omvendte funktion til arcsin. Grøn påstår, at arcsin er kontinuert og differentiabel pr. definition. Det er desværre ikke helt rigtigt – at sætte et integraltegn foran en funktion sikrer ikke ret meget. Arcsin er kontinuert og differentiabel pga. analysens fundamentalsætning, og fordi integranten er kontinuert. Det sidste bliver ikke bevist, men jeg vil godt acceptere det.

Det er klart, at arcsin har en omvendt funktion, sinus. Men her glemmes noget centralt. Før vi kan arbejde med den omvendte funktion, så er vi nødt til at kende værdimængden for arcsin, for det må være definitionsmængden for sinus, når denne er defineret som en omvendt funktion. Men der er ikke en angivelse af, hvad arcsin's værdimængde er. Så hvis vi accepterer, at omkredsen i enhedscirklen er 2π, så er sinus defineret af Grøn med en definitionsmængde er $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$. Hvis definitionsmængden for arcsin havde været]–1; 1[, så kunne vi måske udvide sinus' definitionsmængde til $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

Grøn angiver, at sinus må være differentiabel dog uden at angive hvorfor. Der må tænkes på omvendtfunktionssætning. Der følger så en udregning, der viser, at $(\sin(x))'=\cos(x)$, men fordi sinus' definitionsmængde er glemt, kan vi kun strække os til at sige, at det er bevist for $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ eller evt. $x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. Undervejs i udregningen angives det, at cosinus er positiv på intervallet $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, men hvor det vides fra, fremgår ikke udover, at cosinus defineres som: $\cos(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

Kan beviset reddes?

Det korte svar er nej! Det lidt længere svar er, at selvom vi tillader forskellige former for periodicitet af sinus og arcsin for at udvide definitions– og værdimængderne, så kan vi aldrig bevise differentiabilitet af sinus i dens ekstrema, ved at anvende Grøns metode.

Argumentet for dette baserer sig på omvendtfunktionssætning. Hvis vi for x_0 har $f'(x_0)=0$, og f har en omvendt funktion f^{-1}, så skal den afledte til f^{-1} i $f(x_0)$ være

$$f^{-1}\left(f(x_0)\right)'=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{0}$$

Med andre ord arcsin kan aldrig udvides til en differentiabel funktion i fx $x=\frac{\pi}{2}$.

Dermed kan Bjørn Grøns metode aldrig anvendes til et fuldstændigt bevis for differentiation af sinus.