Matematisk teori
– og den mundtlige prøve ved matematik A

Bjørn Grøn, Rysensteen Gymnasium

Hvis en elev skal gå til tops ved den mundtlige prøve på A–niveau, kræver det normalt, at der *demonstreres indsigt i matematisk ræsonnement og teoribygning.* Eksamensspørgsmålene skal jo dække hele emnefeltet, der er beskrevet i læreplanen, og derfor vil der også være spørgsmål, hvor fokus er et andet, og hvor man kan få topkarakter ved at *demonstrere overblik over et område af matematik eller viden om et område, hvor matematik anvendes i samspil med andre fag.* Men som sagt – det normale er, at der skal demonstreres indsigt i et stykke matematisk teori.

Det er fokus for Peter Ribers indlæg i juni–nummeret, hvor han eksemplificerer et problem, jeg tror mange lærere ofte står med op til eksamen: Hvor findes de gode beviser i netop dette emne – eller dette. I gamle dage, som er for over 15 år siden, blev det klaret ved, at man undlod at opgive sådanne emner til mundtlig eksamen, hvor man havde svært ved at finde sådanne ting. Det betød fx, at emner inden for statistik dengang sjældent indgik ved eksamen på de høje niveauer. Men den mulighed blev afskaffet i 2005.

Eleverne skal jo kunne gå til tops uanset hvilket spørgsmål, de trækker. Derfor er man som lærer nødt til, nærmest fra undervisningens start, at overveje: Hvilke beviser og hvilken del af den matematiske teori er velegnet stof til mundtlig eksamen inden for hvert enkelt af de faglige emner, der indgår i pensum. Mange af de faglige emnekredse volder næppe de store problemer. Men nogle gør helt sikkert. Jeg vil i det følgende give nogle bud på, hvad man kunne gøre inden for nogle stofområder, der erfaringsmæssigt volder problemer. Eksemplerne er selvfølgelig hentet fra *Hvad er matematik?* – men det som nævnes nedenfor, kan frit tilgås via websitet lr-web.dk/Lru/microsites/hvadermatematik/index.html.

Funktioner af to variable: Begreberne *differentiabilitet*, *retningsafledet* og specielt *partielt afledede* er naturligvis helt centrale, og det er vigtigt at fortælle eleverne, at differentiabilitet medfører eksistens af partielt afledede, men ikke nødvendigvis omvendt. Vigtigt for at give dem et første indtryk af, at når man går et trin op i antal dimensioner sker der noget egentligt nyt, det er ikke bare en generalisering. Men hvordan kommer teorien i spil? Nogle eksempler:

- Beviset for, at *gradienten angiver retningen med størst stigning eller fald*, ligger i grundbogen, men beviset for, at *gradienterne står vinkelret på niveaukurverne* ligger på website (der er her to forskellige beviser).
- *Udledning af ligningen for tangentplanen* ligger på website, men dette bygger naturligvis på krydsproduktet, så det ville jeg selv kun tage med, hvis klassen havde valgt at inddrage et forløb om 3d og krydsproduktet.
- *Hvis de dobbelt afledede og de blandede afledede er kontinuerte, så er de blandede afledede ens.* Dette er virkelig mærkeligt, og er derfor en af de regneregler, der er værd at ofre et bevis. Beviset, der ligger på website, er lidt teknisk – man opskriver identiteten:

$$\big(f(a+h,b+k)-f(a+h,b)\big)-\big(f(a,b+k)-f(a,b)\big)=$$
$$\big(f(a+h,b+k)-f(a,b+k)\big)-\big(f(a+h,b)-f(a,b)\big) \qquad (*)$$

  og undersøger, hvad der sker når vi lader h og k gå mod 0. Denne undersøgelse foregår ved at definere hjælpefunktionerne:

  $u(x)=f(x,b+k)-f(x,b)$ og $v(y)=f(a+h,y)-f(a,y)$

  Når vi differentierer disse funktioner, kommer de partielle afledede i spil. Ideen er nu at anvende middelværdisætningen nogle gange på identiteten (*) og i sidste ende anvende kontinuiteten. Lad eleverne ved selve eksamen blot opskrive det samlede udtryk fra deres notater, så de er i gang. Beviset bygger som sagt på en vis fortrolighed med middelværdisætningen, dvs. på, at man har prioriteret denne sammen med *monotonisætningen* under emnet differentialregning.
- *Sætningen om arten af stationære punkter* var emnet for Peter Ribers indlæg. Et lidt andet bevis findes på website, men den grundlæggende ide er den samme: At vi kan ræsonnere os igennem blot med kendskab til diskriminantens betydning for et andengradspolynomiums graf. Det er en smuk anvendelse af elementær matematik.

Vektorfunktioner: I dette emne skal man nok passe på, det ikke ender med en demonstration af, hvordan man tegner parameterkurver og løser skriftlige opgaver. Der må gerne indgå et ræsonnement herom, men hvilke emner er her gode? Også her er *differentiabilitet* det centrale begreb. Definitionen vil normalt være, at man differentierer en vektorfunktion ved at differentiere koordinatfunktionerne. Når man herefter introducerer tangenter, bør man undre sig: Hvorfor ligger tangenten langs kurven? Sådan er den jo ikke defineret. Så det kunne være et af eksemplerne:

- *Differentialkvotienten er en tangentvektor*. Beviset, der ligger på website, er en forholdsvis enkel generalisering af differentiabiliteten i én dimension.

- *Udledning af formlen for længden af et stykke af banekurven*. Beviset, der ligger på website, kan klares som en simpel sag (sammen med andre emner) ved en hovedsagelig intuitiv argumentation vha. Pythagoras. Man kan også gå hele vejen, give en kort introduktion til integralregning på basis af summer, og give dette bevis som et eksempel på anvendelser. Dette bevis ligger også på website.

- *Areal af et område afgrænset af en banekurve*. Her er der flere versioner, men den intuitivt mest oplagte, når man har arbejdet med integralregningens hovedsætning, er at anvende en substitutionsmetode og føre det tilbage til kendt stof. Dette bevis ligger på website.

- *Krumning af banekurver*. Det er behandlet i grundbogen, men der ligger også et materiale frit tilgængelig på websitet for filmserien *10 danske matematikere – 10 matematiske fortællinger*: lr-web.dk/Lru/microsites/10danskematematikere/index.html. Det er det indledende materiale til Steen Markvorsens film om *Skumstrukturer og minimalflader*. Her udledes *krumningsformlen for banekurver og som et korollar hertil krumningsformlen for en graf*.

Trigonometriske funktioner: Dette er et ret lille emne, hvor vi hovedsageligt lærer eleverne om radianer, lidt om harmoniske svingninger og at løse opgaver. Men emnet indeholder også differentiation af sinus og cosinus. Hvis man har valgt at gennemgå anden ordens differentialligninger som valgfrit emne, ville jeg integrere emnet heri, og måske inddrage beviset for, at løsningen til $y'' = -k^2 \cdot y$ kan skrives som én harmonisk svingning. Men ellers, hvad gør man her?

- Man kunne vælge at lade dette emne blive behandlet i forbindelse med et historisk emne eller en større anvendelse, eller begge dele. Her er der meget at tage af, fx *Galileis bestemmelse af omløbstiden for Callistos bane om Jupiter*.

- På lidt avancerede hold kan man i et samarbejde med fysik eller musik arbejde med sider af *Fourieranalyse*. På website ligger der flere projekter herom.
- *Beviset for at den afledede af sinus er cosinus* er umiddelbart oplagt at kaste sig over. Men her kan det gå gruelig galt, da de fleste beviser, man kan finde, både i seriøse lærebøger og på nettet, er forkerte, idet de et eller andet sted i beviset indeholder en cirkelslutning. Desværre kan de intuitivt oplagte ”beviser” ikke repareres – men man kan lade det indgå, hvis man samtidig udstyrer eleverne med argumenter, der viser svaghederne, for det kan demonstrere stor indsigt i matematisk ræsonnement. Det grundlæggende problem er naturligvis, at vi ikke har en præcis definition af sinus, fordi vi ikke har en præcis måde at måle en kurvelængde på.

  I en særskilt artikel vil jeg redegøre for dette i større detalje og også kommentere de forkerte beviser mere udførligt.

Lineære differentialligninger: Her tror jeg de fleste har materialer til gode eksamensspørgsmål. For at understrege forskellen til de ikke–lineære, hvor der ofte opstår problemer med definitionsmængderne, vil jeg altid gennemføre beviserne i de lineære tilfælde uden brug af separationsmetoden, men alene ved algebraiske omskrivninger med brug af kendskab til reglerne for differentiation af et produkt og af sammensat funktion. På website er der lagt forskellige versioner af beviserne.

Ikke–lineære differentialligninger: Dette emne rummer både kendt stof, som den logistiske differentialligning og stof der sikkert er nyt for mange lærere, nemlig løsning ved separation af de variable. Begge emner er gode til mundtlig eksamen:

- *Udledning af løsningen til den logistiske differentialligning* er vist et ønskespørgsmål for alle nogenlunde gode elever. Da vi her normalt arbejder i området, hvor der ikke er problemer med definitionsmængden, foretrækker jeg også her ved nogle omskrivninger at føre problemet tilbage til det lineære tilfælde. Men jeg tror hver lærer har sin ”favorit” og godt styr på dette.

- *Udledning af metoden til at løse separable differentialligninger* er et nyt emne i pensum. Den praktisk anvendelse ved den skriftlige prøve klares vel med et værktøjsprogram. Men hvordan argumenterer vi for at dette faktisk er den fuldstændige løsning? Det er et af de mere krævende beviser, hvor eleven skal have styr på mange forskellige dele af analysen, så på knap så gode hold vil man næppe tage dette med. Men på gode hold kan elever virkelig brillere her. Beviset ligger i grundbogen og ikke på website.

Binomialfordelingen: Udledningen af binomialfordelingens sandsynlighedsfordeling er naturligvis oplagt, men det er ofte lidt svært at få det ud over almindelig snak, hvis det bliver stående her. Man kunne overveje følgende eksempler på lidt mere teori:

- *Regneregler for middelværdi og varians for stokastiske variable*, og specielt anvendt på Bernouilli–fordelinger. Beviser ligger på website.

- *Formlerne for middelværdi og varians for binomialfordelingen*, hvor der på website ligger 2 meget forskellige beviser: Ét med brug af regnereglerne for stokastiske variable og formlerne udledt for Bernouilli–fordelingen. Og et med brug af differentialregning! Det sidste er ret elegant.

- *Sætningen om det mest sandsynlige udfald* – dette bevis ligger imidlertid kun i grundbogen.

Sandsynlighedsregning: Også her kan det være lidt svært at komme ud over small–talk om terningkast og den slags. Men med en lille twist, hvor man – uden nødvendigvis at gøre det eksplicit – inddrager betingede sandsynligheder, kan det bedre komme op at flyve. Og i disse corona–tider, hvor man slynger rundt med begreber som "falsk positiv" og lignende, så kunne dette være et godt bidrag til at demonstrere faldgruberne i sandsynlighedsregningen. Der ligger et materiale herom på før omtalte website til filmserien *10 danske matematikere…*, nemlig i det indledende materiale til Susanne Ditlevsens film. Et andet godt emne kunne være:

- *Tællemetoder og Pascals trekant*, hvor man fx udleder sumformlen, og måske slutter af med binomialformlen. Begge ligger på website, det første i bog 1 som et projekt i tilknytning til kapitlet om sandsynlighedsregning, det andet i bog 2 som et materiale i tilknytning til binomialfordelingen.

- *Konfidensintervaller og signifikans*, der måske ikke peger så meget i retning af egentlige beviser, men rummer megen godt matematisk ræsonnement.

Normalfordelingen: Her kommer man ofte ud i postulater om klokkeformede kurver og om tæthedsfunktionen, men det er også svært stof, hvis man skal behandle det ordentligt. Der er imidlertid en genvej:

- *Random walk og normalfordelingen* som en grænsekurve for en random walk med rigtig mange skridt. Dette kan give grundlag for et fornuftigt ræsonnement bag de berømte 68 %, 95 % og 0,25 %.

- *Hvordan undersøges om et materiale er normalfordelt*. Ved en skriftlig prøve trækker man qq–plots ind på banen, men hvad er det der sker her. I et projekt på website i tilknytning til normalfordelingen redegøres for transformationen af normalfordelingskurven til en lineær kurve.

Mange emner som differential– og integralregning og vækstmodeller er ikke berørt, da jeg tror de fleste er nogenlunde klædt på til at forberede eleverne på mundtlig eksamen i de emner. Og eksemplerne ovenfor er måske lidt tilfældige. Men den afgørende pointe er den fra starten: Hav allerede fra første færd i undervisningen med i tankerne, hvordan et givet emne kan give grundlag for gode mundtlige præstationer.