Gradientens geometriske betydning vha. tangentplanen

Anders Wolfsberg, Roskilde Gymnasium

Her præsenteres en udledning af en velkendt geometrisk fortolkning af gradienten til en funktion af to variable.

Det didaktiske formål er dels, at eleverne får mulighed for at udføre et (relativt) tilgængeligt bevis for gradientens geometriske betydning til eksamen. Og dels, at eleverne får en grafisk forståelse for den nære kobling mellem begreberne væksthastighed, tangentplan og gradient for en funktion af to variable.

Sætning: Gradientens geometriske betydning

Lad (x_0, y_0) være et talpar i definitionsmængden for en funktion, $f(x, y)$, hvori funktionen er differentiabel. Antag, at $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$.

1) En repræsentant for gradientvektoren $\nabla f(x_0, y_0)$, afsat i planen $z = f(x_0, y_0)$ med startpunkt i $P_0\,(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, angiver retningen, hvori funktionens væksthastighed er maksimal.
2) Længden af gradienten angiver størrelsen af denne væksthastighed.

Bemærk, at der i punkt 1) insisteres på, at eleverne afsætter gradientvektor–repræsentanten fra P_0, og ikke fra fodpunktet $(x_0, y_0, 0)$ i xy–koordinatplanen. Årsagen er, at det geometriske perspektiv på gradienten og tangentplanen derved kan knyttes tættere.

Eleverne kan generalisere deres geometriske forståelse af væksthastigheden i x_0 for en funktion af én variabel, fx formuleret som y–tilvæksten på tangenten ved et enhedsskridt i x–aksens retning.

Lad f og P_0 være givet som i sætningen. Da kan analogien formuleres som følger:

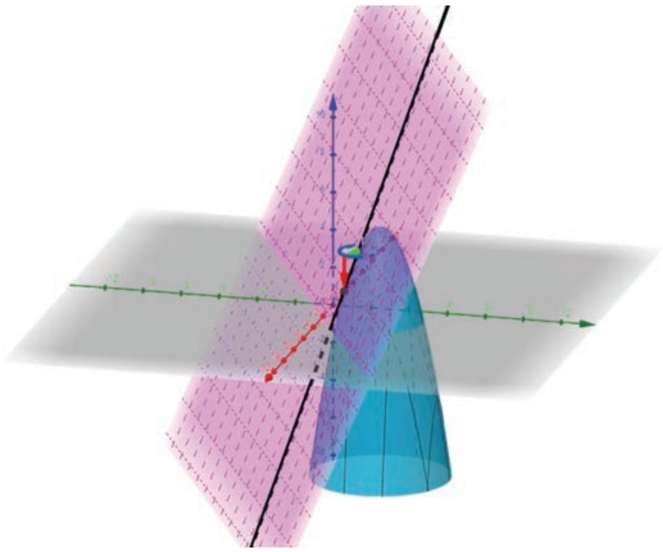
Definitioner: *xy*–tilvækst og væksthastighed

En xy–tilvækst fra P_0 er en tilvækst fra P_0 i planen $z = f(x_0, y_0)$.

Er tilvæksten af længde 1, kaldes den også et xy–enhedsskridt. Netop ethvert xy–enhedsskridt kan repræsenteres ved en

enhedsvektor $\vec{e}_v = \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix}$ med parameter $v \in [0; 2\pi[$.

Ved væksthastigheden for f i (x_0, y_0) langs $\vec{e}_v$ forstås z–tilvæksten i tangentplanen ved et xy–enhedsskridt fra P_0 repræsenteret ved $\vec{e}_v$.



Figur 1
En paraboloide og tangentplanen i et punkt derpå, P_0. Den grønne pil er en repræsentant for $\vec{e}_v$, og ved variation af v aftegnes en blå enhedscirkel parallelt med xy–koordinatplanen. Den røde pils længde og retning illustrerer væksthastigheden langs $\vec{e}_v$. Den sorte tangent kan evt. for eleverne lidt uformelt benævnes ”tangenten i P_0 parallel med $\vec{e}_v$.

Grafisk kan definitionerne illustreres som på figur 1 (link til applet med en skyder for v er at finde sidst i dokumentet).

Udledning, del 1
Optimering af væksthastigheden som funktion af retning

Antag, hvad der angives i sætningens præmis. Ligningen for tangentplanen i punktet P_0 er da:

$$\Delta z = f_x'(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f_y'(x_0, y_0) \cdot \Delta y$$

Angives et xy–enhedsskridt fra P_0 ved $\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \vec{e}_v = \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix}$,

fås z–tilvæksten i tangentplanen som funktion af v.

Lad os kalde denne for $\Delta z = h(v)$ for at funktionsnotationen bliver genkendelig for eleverne:

$$h(v) = f_x'(x_0, y_0) \cdot \cos(v) + f_y'(x_0, y_0) \cdot \sin(v), \quad v \in [0; 2\pi[$$

For at vise, at gradienten ”angiver retningen for maksimal væksthastighed”, vil det givetvis fremstå intuitivt for eleverne at fortsætte ved at maksimere h og afsøge, hvorhen dén strategi fører ift. at afdække gradientens betydning – en motiverende pointe er, at de partielt afledede allerede optræder i funktionen.

Det kan bevises, illustreres eller på anden vis retfærdiggøres for eleverne, at h er en harmonisk svingning (bemærk, at $\nabla f(x_0, y_0) \neq \vec{0}$)[1]. Formålet med dét er at give et argument for, at h har et positivt maksimum, et negativt minimum og ingen vandret vendetangent – dén observation skal anvendes snarest.

Lad v^* angive et ekstremumssted for h. Da gælder, at $h'(v^*) = 0$, altså:

$$0 = f_x'(x_0, y_0) \cdot \left(-\sin\left(v^*\right)\right) + f_y'(x_0, y_0) \cdot \cos\left(v^*\right)$$

Her kan der løses for v^*, og dét vil nok være elevernes umiddelbare strategi. Men da netop gradientens egenskaber ønskes undersøgt, kan eleverne evt. vejledes til at se logikken i at omskrive vha. en determinant:

$$0 = \det\left(\begin{pmatrix} \cos\left(v^*\right) \\ \sin\left(v^*\right) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f_x'(x_0, y_0) \\ f_y'(x_0, y_0) \end{pmatrix}\right)$$

Det ses her, at gradienten er parallel med enhedsvektoren i xy–retningen for maksimal væksthastighed – dog også med dén i xy–retningen for minimal z–tilvækst.

[1] Sæt $A \equiv \left|\nabla f(x_0, y_0)\right| > 0$, da eksisterer $v_0 \in [0; 2\pi[$, så

$$f_x'(x_0, y_0) = A \cdot \cos(v_0) \text{ og } f_y'(x_0, y_0) = A \cdot \sin(v_0)$$

Derved fås

$$h(v) = A \cdot \cos(v_0) \cdot \cos(v) + A \cdot \sin(v_0) \cdot \sin(v)$$
$$= A \cdot \cos(v_0 - v) = A \cdot \sin\left(v + \frac{\pi}{2} - v_0\right)$$

ved diverse trigonometriske identiteter.

Udledning, del 2
En positiv z–tilvækst langs gradientens retning

Spørgsmålet er nu: Medfører en xy–tilvækst fra P_0 langs gradienten en maksimal eller minimal z–tilvækst i tangentplanen? Som observeret tidligere, kan dette besvares ved at se, om denne z–tilvækst er positiv eller negativ. Derfor sættes $\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \nabla f(x_0, y_0)$ i tangentplanens ligning, hvilket giver:

$$\Delta z = f_x'(x_0, y_0) \cdot f_x'(x_0, y_0) + f_y'(x_0, y_0) \cdot f_y'(x_0, y_0)$$

$$\Delta z = \left|\nabla f(x_0, y_0)\right|^2 > 0$$

Altså må gradienten være ensrettet med enhedsvektoren i retning af maksimal z–tilvækst i tangentplanen.

Således er punkt 1) i sætningen redegjort for. Punkt 2) følger også umiddelbart:

Det blev vist ovenfor, at en xy–tilvækst langs gradienten fra P_0 – et skridt af længde $\left|\nabla f(x_0, y_0)\right|$ – medfører en z–tilvækst i tangentplanen på $\left|\nabla f(x_0, y_0)\right|^2$. Da tangentplanen netop er en plan figur, viser dette, at en xy–tilvækst af længde 1 i gradientens retning medfører en z–tilvækst i tangentplanen af længde $\left|\nabla f(x_0, y_0)\right|$.

Eventuelt kan dette illustreres for eleverne med en retvinklet trekant med katetelængder $\left|\nabla f(x_0, y_0)\right|$ og $\left|\nabla f(x_0, y_0)\right|^2$, der skaleres til én med katetelængderne 1 og $\left|\nabla f(x_0, y_0)\right|$.

Q.E.D.

Link til applet

geogebra.org/m/tba4jzvk