Estimation af π

Cille Hautop Kristensen, student fra Rosborg Gymnasium og HF og Thomas Heide-Jørgensen, Rosborg Gymnasium og HF

Indholdet i denne artikel er en lettere redigeret udgave af et afsnit i Cilles SRP fra foråret 2020, hvor hun beviste et sjovt resultat om estimation af π.

Der findes mange metoder til at estimere tallet π. Et resultat, der ved første øjekast kan virke overraskende, er:

> Hvis p er et estimat af π med en præcision på n decimaler, så er $p + \sin(p)$ et estimat med en præcision på (mindst) $3n$ decimaler.

For ethvert $n \in \mathbb{N}$ vil vi med et estimat af π med en præcision på n decimaler forstå et tal på formen $p = 3{,}a_1 a_2 a_3 \ldots$, hvor de første n decimaler stemmer overens med de første n decimaler af

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288\ldots$$

Fx er $p = 3{,}14824$ et estimat med en præcision på 2 decimaler, og $3{,}14157$ er et estimat med en præcision på 4 decimaler.

Det sædvanlige π–estimat $p = 3{,}14$, der selvfølgelig har en præcision på 2 decimaler, kan eksempelvis med denne metode forbedres til

$$p + \sin(p) = 3{,}14 + \sin(3{,}14) = 3{,}14159265292\ldots$$

hvor præcisionen er på 8 decimaler. Påstanden garanterer en tredobling af præcisionen, men vurderingen der laves i beviset er ganske grov, så ofte vil estimatet have betydeligt større præcision end det garanterede.

Beviset kan føres ved hjælp af taylorpolynomier og Lagranges restled. Vi starter derfor med en generel betragtning om taylorpolynomiet for sinus og det dertilhørende Lagrange–restled. Vi minder om, at taylorpolynomiet af grad n i udviklingspunktet a, for en tilpas pæn funktion f, er givet ved

$$T_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$$

hvor $f^{(k)}$ betegner den k'te afledte af f, og at det tilhørende Lagrange–restled er givet ved

$$R_n f(x) = f^{(n+1)}(\xi) \cdot \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

hvor ξ er et tal mellem a og x. Taylorpolynomiet for $\sin(x)$ af grad $2n - 1$ i udviklingspunktet 0 er da givet ved

$$T_{2n-1}(\sin(x)) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{(n+1)} \cdot x^{(2n-1)}}{(2n-1)!}$$

Bemærk, at der kun er ulige potenser af x. Der gælder altså, at $T_{2n-1}(\sin(x)) = T_{2n}(\sin(x))$. Det ses dermed, at

$$T_2(\sin(x)) = T_1(\sin(x)) = x$$

Udregningen af Lagranges restled for $\sin(x)$ giver

$$\begin{aligned} R_{2n}(\sin(x)) &= \sin(x) - T_{2n}(x) \\ &= (-1)^n \cdot \cos(\xi) \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

For $n = 1$ kan vi da lave vurderingen

$$\begin{aligned} |x - \sin(x)| = |R_{2\cdot 1}(\sin(x))| &= \left|(-1)^1 \cdot \cos(\xi) \cdot \frac{x^3}{3!}\right| \\ &= \left|(-1)^1\right| \cdot |\cos(\xi)| \cdot \frac{|x^3|}{|3!|} \le \frac{|x^3|}{3!} < |x^3| \end{aligned}$$

idet $\mathrm{Vm}(\cos(x)) = [-1, 1]$.

Lad nu $p = \pi + x$. Da gælder der som det fremgår af nedenstående enhedscirkel, at

$$\begin{aligned} |p + \sin(p) - \pi| &= \pi + x + \sin(\pi + x) - \pi \,| \\ &= |x + \sin(\pi + x)| = |x - \sin(x)| \end{aligned}$$

Hvis p er et estimat af π med en præcision på n decimaler, og $p = \pi + x$, da er $|x| < 10^{-n}$.

Sammenfattes ovenstående fås følgende ulighed

$$|p + \sin(p) - \pi| = |x - \sin(x)| < |x|^3 < \left(10^{-n}\right)^3 = 10^{-3n}$$

og dermed er forskellen på $p + \sin(p)$ og π mindre end 10^{-3n}, hvilket beviser påstanden.