Endnu en gang π og 22/7

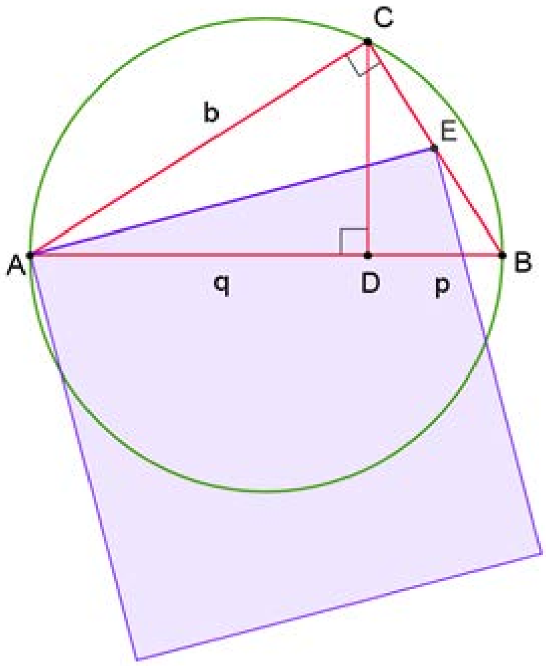
Jens Carstensen, Frederiksberg

Vi skal se på to simple eksempler på tilnærmede cirkelkvadraturer. Lad *AB* være diameter i en cirkel med radius *r*. Punktet *D* ligger på *AB*, så $BD : AD = 2 : 5$. Den vinkelrette på *AB* i *D* skærer cirklen i *C*, så ΔABC er retvinklet. Desuden er *AE* medianen fra *A* på *BC*. I ΔACE er

$$AE^2 = b^2 + \left(\tfrac{1}{2}a\right)^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + b^2$$

Desuden sætter vi

$$p = BD = \tfrac{2}{7}c \quad \text{og} \quad q = AD = \tfrac{5}{7}c$$



Efter velkendte sætninger i den retvinklede trekant er

$$b^2 = qc \quad \text{og} \quad a^2 = pc$$

så

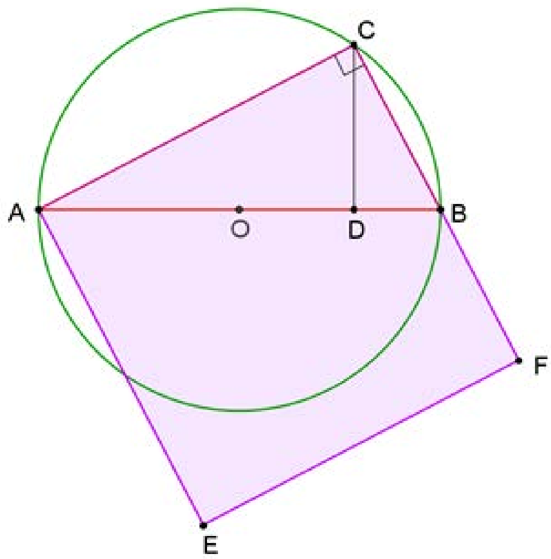
$$AE^2 = \tfrac{1}{4}pc + qc = \tfrac{1}{14}c^2 + \tfrac{5}{7}c^2 = \tfrac{11}{14}c^2 = \tfrac{11}{14}\cdot 4r^2 = \tfrac{22}{7}r^2$$

Arealet af kvadratet med *AE* som side er altså $\frac{22}{7}r^2$, mens cirklens areal er πr^2. Vi har dermed fundet en simpel tilnærmet cirkelkvadratur.

Lad os igen se på en cirkel med diameter *AB* og lad *D* være det punkt på *AB*, for hvilket $AD : DB = 11 : 3$. Den vinkelrette på *AB* i *D* skærer cirklen i *C*, så $\angle ACB$ er ret. Vi tegner kvadratet *ACFE* med *AC* som side. I den retvinklede ΔABC gælder efter en kendt sætning for retvinklede trekanter, at

$$AC^2 = AB \cdot AD = 2r \cdot \tfrac{11}{14} \cdot AB = 2r \cdot \tfrac{11}{14} \cdot 2r = \tfrac{22}{7}r^2$$

Også denne konstruktion giver altså en tilnærmet cirkelkvadratur.



Til slut ser vi, uden forbindelse med det forrige, på integralet

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{x^2+1}\,dx$$

Brøken omformes ved polynomiers division, så vi får

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \left(x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{7}x^7 - \tfrac{2}{3}x^6 + x^5 - \tfrac{4}{3}x^3 + 4x - 4\,\mathrm{Arc\,tan}\,x\right]_0^1$$

$$= \tfrac{1}{7} - \tfrac{2}{3} + 1 - \tfrac{4}{3} + 4 - 4\,\mathrm{Arc\,tan}\,1$$

$$= \tfrac{22}{7} - \pi$$

På figuren nederst ses et udsnit af det grafiske billede af integranden. Arealet af området mellem grafen og *x*–aksen er meget lille, nemlig $\frac{22}{7} - \pi \approx 0{,}001264 \approx \frac{1}{800}$.