Bevis vedr. typebestemmelse af stationære punkter

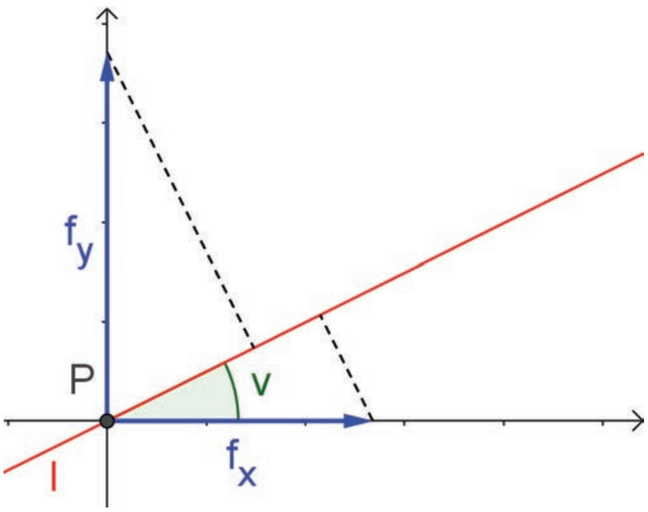
PETER RIBER, Zahles gymnasium

Det kunne være rart med et bevis i emnet *Funktioner af 2 variable* bl.a. med henblik på mundtlig eksamen. Typebestemmelse af stationære punkter, er en oplagt kandidat, da opgaver i disse regler ofte indgår i skriftlige eksamen.

Det umiddelbare problem er, at den sædvanlige behandling af emnet typisk involverer egenværdiproblemer og, hvis de skal begrundes, også Laplace–multiplikatorer og det karakteristiske polynomium via determinanten af krumningsmatricen (Hessian matrix).

Hvis man sænker sigtekornet og kun ønsker at bevise typebestemmelsesreglerne med udgangspunkt i kendte begreber fra A–stoffet kan mindre gøre det.

Ideen i beviset er at undersøge betingelsen for, at krumningen i et punkt *P* har samme fortegn i alle retninger. Hvis den har det i et stationært punkt, er der tale om et ekstremum. Krumningen er den afledede af hældningen, så vi indleder med at opstille et udtryk for hældningen α i en given retning og i et vilkårligt punkt *P*, se figuren.



Vi ser på et *xy*–koordinatsystem i tangentplanen i *P*. Størrelsen af hældningen i *x*–retningen er den partielle afledede

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f = f_x$$

og tilsvarende er størrelsen i *y*–retningen den partielle afledede

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f = f_y$$

Hældningen α i en 3. retning parallel med en linjen *l* består af 2 bidrag. Et fra planens hældning i *x*–retningen: $\cos(v) \cdot f_x$ og et fra y-retningen: $\sin(v) \cdot f_y$.

Kalder vi cos(*v*) for *p*, og sin(*v*) for *q* har vi:

$$\alpha = p \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,y) + q \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x,y) = p \cdot f_x + q \cdot f_y$$

Da krumningen *k* er den afledede af hældningen, kan krumningen i samme retning findes via samme udtryk anvendt på hældningen α, der jo også er en funktion af 2 variable. Vi erstatter *f* med α og indsætter dermed udtrykket i sig selv på α's plads:

$$\begin{aligned} k &= p \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\alpha + q \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\alpha \\ &= p \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p \cdot f_x + q \cdot f_y\right) + q \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(p \cdot f_x + q \cdot f_y\right) \\ &= p^2 \cdot f_{\mathrm{xx}} + p \cdot q \cdot f_{\mathrm{yx}} + q \cdot p \cdot f_{\mathrm{xy}} + q^2 \cdot f_{\mathrm{yy}} \\ &= p^2 \cdot f_{\mathrm{xx}} + 2\,\mathrm{pq} \cdot f_{\mathrm{xy}} + q^2 \cdot f_{\mathrm{yy}} \\ &= q^2 \cdot \left(f_{xx} \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^2 + 2 f_{xy} \cdot \frac{p}{q} + f_{yy} \right) \end{aligned}$$

I sidste skridt er kvadratet på *q* sat udenfor parentes. Da kvadrater altid er positive bestemmes fortegnet på udtrykket alene af den bageste faktor.

Det er et 2.gradspolynomium i kvotienten *p*/*q*, så det har udelukkende funktionsværdier med samme fortegn, når der ingen rødder er, dvs. når diskriminanten *d* er mindre en 0.

Denne ulighed opskrives og koefficienternes værdier fra 2.gradspolynomiet $a = f_{xx}$, $b = f_{xy}$ og $c = f_{yy}$ indsættes:

$$\begin{aligned} d < 0 &\Leftrightarrow b^2 - 4ac < 0 \\ &\Leftrightarrow \left(2 \cdot f_{xy}\right)^2 - 4 \cdot f_{xx} \cdot f_{yy} < 0 \\ &\Leftrightarrow f_{xy}^2 - f_{xx} \cdot f_{yy} < 0 \end{aligned}$$

Med notationen $r = f_{xx}$, $t = f_{yy}$ og $s = f_{xy}$ kan uligheden også skrives $r \cdot t - s^2 > 0$. Når denne ulighed er opfyldt i et stationært punkt, er der altså tale om et ekstremum.

Hvis *r* (eller *t*) i et ekstremum er større end 0, er krumningen positiv i alle retninger, og der er tale om et minimum.

Hvis *r* (eller *t*) i et ekstremum er mindre end 0, er krumningen negativ i alle retninger, og der er tale om et maksimum.

Hvis $d > 0$, dvs. $r \cdot t - s^2 < 0$, er der flere rødder. Dermed forekommer funktionsværdier med begge fortegn, og vi må have en saddel.

Bemærk, at beviset omhandler fortegnsvariationen for krumninger i alle punkter. Konklusionen gælder dermed også i stationære punkter, selv om de førsteordens afledede i disse er 0.