

Matematisk kompetence – et teoretisk blik

KASPER BJERING SØBY JENSEN, Roskilde Katedralskole, ph.d. i matematikkens didaktik

Denne sommer er det 20 år siden, at Naturvidenskabeligt Uddannelsesråd og Undervisningsministeriet iværksatte projektet ”Kompetencer Og Matematiklæring”, bedre kendt under navnet KOM-projektet, og især kendt for den afsluttende rapport, der blev udsendt af projektets arbejdsgruppe i oktober 2002, og som i dag kendes vidt og bredt som ”KOM-rapporten”¹⁾.

Rapporten blev forfattet af arbejdsgruppens formand *Mogens Niss*, professor i matematik og matematikkens didaktik ved IMFUFA (Roskilde Universitetscenter) og gruppens akademiske sekretær *Tomas Højgaard Jensen*, ph.d.-studerende samme sted (i dag lektor i matematikkens didaktik ved DPU/Aarhus Universitet).

Rapporten har næppe nogen konkurrent, når det kommer til titlen som det mest indflydelsesrige matematikdidaktiske skrift, der har været udsendt på dansk. Selv i dag 20 år efter, tager mange matematikdidaktiske diskussioner blandt både praktikere, udviklere og forskere afsæt i rapportens begrebsapparat – også internationalt. Rapporten blev i 2011 udsendt på engelsk²⁾.

De 20 år har imidlertid også betydet, at den oprindelige rapport rykker stadigt længere i baggrunden, til fordel for de mange mindre grundige fremstillinger af dens tanker, som med tiden er dukket op. Jeg vil derfor i denne artikel forsøge at trække grundtanken i KOM-rapporten op, herunder få genfortalt nogle af de gode pointer, som med tiden synes at være trådt lidt i baggrunden.

Matematisk kompetence

KOM-rapporten er først og fremmest kendt for den såkaldte *kompetenceblomst*, som er en grafisk fremstilling af de otte *matematiske kompetencer*, som beskrives i rapporten. Det store fokus på figuren gør af og til, at opstillingen af de otte matematiske kompetencer bliver til selve formålet med øvelsen. Men indholdet er mere principielt.

KOM-rapporten beskriver mere generelt, hvad der skal forstås ved *matematisk kompetence*. Den begrebslige skelnen mellem *matematisk kompetence* og *én matematisk kompetence* er her vigtig. Rapporten forsøger med sit begrebsapparat at lave en samlet beskrivelse af, hvad det vil sige at besidde *matematisk kompetence* i sit fulde omfang og kompleksitet.

Da ”kompetence” allerede for 20 år siden blev brugt i flæng og på ganske luftige måder, definerer KOM-rapporten som det første, hvad der skal forstås med dette: »En person besid-

der kompetence inden for et område, hvis han eller hun faktisk er i stand til at begå sig med gennemslagskraft, overblik, sikkerhed og dømmekraft inden for det pågældende område.«

I forlængelse heraf defineres *matematisk kompetence* som »at have viden om, at forstå, udøve, anvende, og kunne tage stilling til matematik og matematikvirksomhed i en mangfoldighed af sammenhænge, hvori matematik indgår eller kan komme til at indgå«.

Og endeligt defineres *én matematisk kompetence* som »indsigtsfuld parathed til at handle hensigtsmæssigt i situationer, som rummer en bestemt slags matematiske udfordringer«. Metoden er at formulere et antal matematiske kompetencer, som til sammen udspænder det egentlige, nemlig matematisk kompetence som sådan.

KOM-projektet fremstilles i dag ofte, som om det udspringer af et eksplicit ønske om at beskrive matematiske kompetencer, men i virkeligheden var udgangspunktet for arbejdsgruppen et kommissorium på 10 ganske omfattende punkter. Arbejdsgruppen opstillede på den baggrund som sin opgave at lave et begrebsapparat, der kunne bidrage til at udvikle svar på de 10 punkter.

Det er således et centralt krav til den opstillede beskrivelse af matematisk kompetence, at den skal kunne anvendes på langs og tværs af uddannelsessystemet. Samme begreber for grundskole, ungdomsuddannelse og videregående uddannelse, såvel som for uddannelse af matematikere, økonomer, pædagoger, elektrikere og bagere.

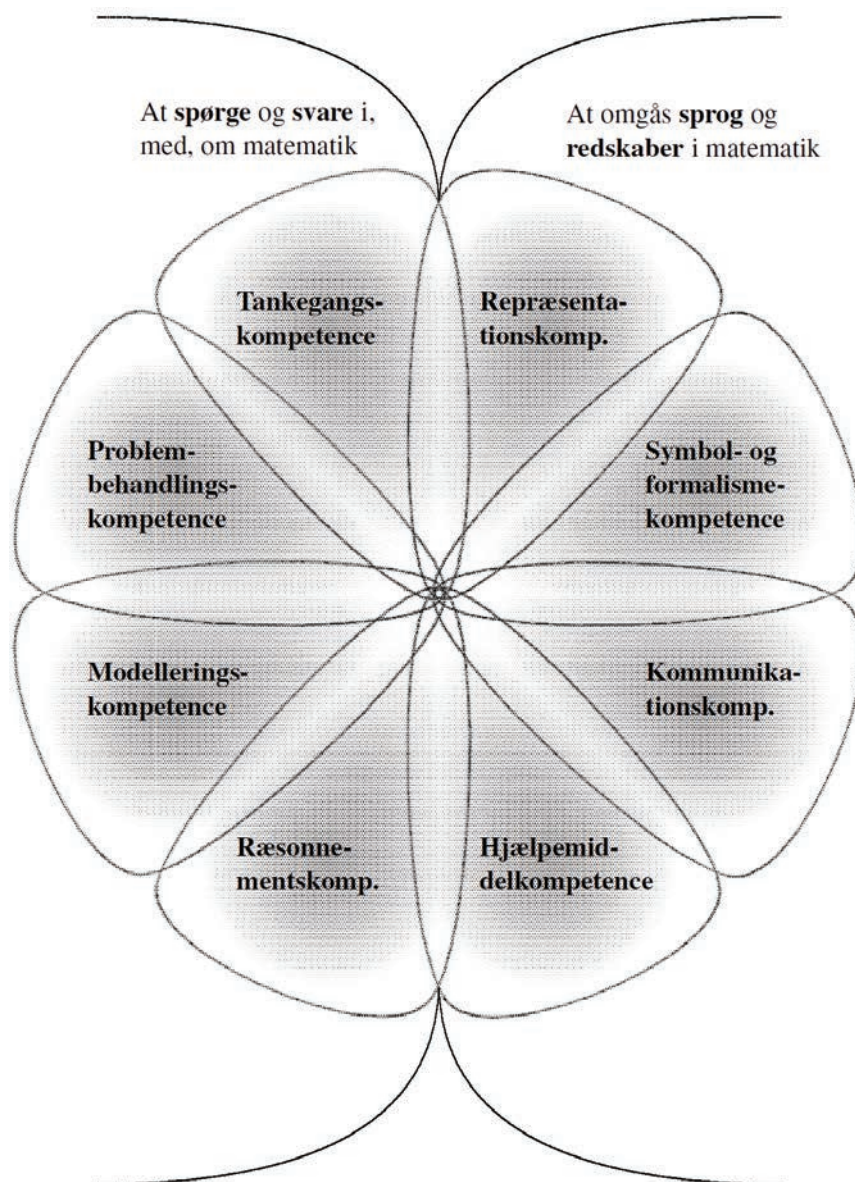
Samtidig skal kompetencebegrebet kunne anvendes både *normativt*, det vil sige til at fastlægge hvilket matematikindhold der skal være et bestemt sted i uddannelsessystemet, dels *deskriptivt* til at beskrive hvad der faktisk er på færde i en konkret undervisning eller læreplan, samt til at beskrive et bestemt menneskes faktiske besiddelse af matematisk kompetence.

KOM-rapporten slår selv fast, at den ikke er et stykke forskning. Det opstillede kompetencebegreb bygger ikke på videnskabelig dokumentation. Der er i stedet »tale om en pragmatisk påstand om, at disse kompetencer tilsammen udspænder og indfanger det væsentlige i matematisk kompetence«. I pragmatikken ligger, at ”kagen kan skæres anderledes”, hvis det virker fornuftigt i situationen.

De mange arbejder, der siden har trukket på KOM-rapporten, fremstår dog i dag som en dokumentation af begrebsapparatets anvendelighed i en mangfoldighed af situationer, og på sin vis fremstår rapporten retrospektivt som et teoretisk/begrebsligt forskningsarbejde.

¹⁾ Rapporten kan læses og downloades gratis i fuld længde på: static.uvm.dk/Publikationer/2002/kom

²⁾ Den engelske version ”Competencies and Mathematical Learning” kan hentes på: milne.ruc.dk/imfufatekster/pdf/485web_b.pdf



Figur 1
Den oprindelige kompetenceblomst (KOM-rapporten, s.45).

Matematiske kompetencer

Det pragmatiske valg består som sagt af otte matematiske kompetencer, som ofte får lov at stå alene. Dette er lidt misvisende, fordi KOM-rapporten ud over de otte kompetencer, som er handlingsorienterede, tilføjer tre typer af "overblik og dømmekraft", der har karakter af at være "aktive indsigter".

De otte matematiske kompetencer opdeles – igen pragmatisk – i to hovedgrupper med fire kompetencer i hver. Dels »At spørge og svare i, med og om matematik» og dels »At omgås sprog og redskaber i matematik«. De otte kompetencer og deres opdeling i hovedgrupper, er afbilledet i "kompetenceblomsten" (se figur 1), som også illustrerer at alle kompetencer er sammenvævet.

I karakteristikken af den enkelte kompetence indgår en række aspekter af kompetencen. Disse skal ikke forstås som delkom-

petencer, der kan betragtes isoleret, men skal alene beskrive hvad kompetencens indhold er. Samtidig har kompetencerne en *produktiv* side, som handler om selv at kunne udføre matematisk arbejde, og en *undersøgende* side, omhandlende at kunne omgås andres matematiske arbejde.

De fire kompetencer til "at spørge og svare i, med og om matematik" er:

Tankegangskompetence: 1) Arten af spørgsmål og svar i matematik, 2) rækkevidden af matematiske begreber samt 3) håndtere forskellige slags matematiske udsagn.

Problemløsningskompetence: 1) At kunne opstille matematiske problemer til behandling samt 2) at kunne løse opstillede matematiske problemer.

Modelleringskompetence: 1) At kunne analysere grundlag for og egenskaber ved foreliggende modeller samt 2) at kunne udføre aktiv modelbygning (som beskrevet i fx modelleringscirklen).

Ræsonnementskompetence: 1) At kunne følge og bedømme et matematisk ræsonnement, 2) at kunne omgås beviser og 3) at kunne udtænke og gennemføre matematiske ræsonnementer.

De fire kompetencer til ”at omgås sprog og redskaber i matematik” er:

Repræsentationskompetence: 1) At kunne forstå og betjene sig af forskellige repræsentationer, 2) kunne se de indbyrdes forbindelser mellem repræsentationer samt 3) at kunne vælge og oversætte mellem forskellige repræsentationer af matematiske sagsforhold.

Symbol- og formalismekompetence: 1) Kunne afkode symbol- og formelsprog, 2) kunne oversætte mellem matematisk symbolsprog og naturligt sprog, 3) behandle og betjene sig af symbolholdige udsagn samt 4) have indsigt i spillereglerne for formelle matematiske systemer.

Kommunikationskompetence: 1) Kunne modtage og fortolke andres formidling af matematiske sagsforhold samt 2) selv at kunne udtrykke sig på forskellig vis om matematiske sagsforhold.

Hjælpemiddelkompetence: 1) Kende til eksistens og egenskaber af forskellige hjælpemidler, 2) at kende muligheder og begrænsninger ved forskellige hjælpemidler samt 3) at på reflekteret vis kunne bruge de enkelte hjælpemidler.

De tre slags ”overblik og dømmekraft” er:

Matematikens faktiske anvendelser i andre fag- og praksisområder: Have viden om og kunne forholde sig til matematikkens faktiske anvendelse i dagligdag, samfund og videnskab.

Matematikens historiske udvikling: Have viden om og kunne forholde sig til matematikkens udvikling i tid og rum, samt i kultur og samfund.

Matematikens karakter som fagområde: Have viden om og kunne forholde sig til hvad der særligt kendetegner matematik som fag, både træk der er fælles med andre fag, og træk der er unikke for matematikken selv.

Disse 8 kompetencer og 3 typer af overblik og dømmekraft, udspænder tilsammen det at besidde matematisk kompetence. Altså at besidde en indsigtfuld handleparathed i situationer af matematisk art. Ingen af de 11 ”komponenter” kan reduceres til de andre. Alle 11 er nødvendige. Men samtidig er

de heller ikke disjunkte. De er vævet så tæt sammen, at visse misforståelser opstår.

For eksempel er tankegangs- og ræsonnementskompetence ikke det samme. Tankegangskompetence handler om at kunne genkende, hvad der hører til i faget – dvs. at kunne håndtere den særlige tankegang, som matematik giver adgang til. Ræsonnementskompetence handler om at kunne gennemføre særlige matematiske argumentationer af både formel og uformel art.

Modellerings- og repræsentationskompetence er heller ikke det samme, selvom matematiske modeller er forsøg på at ”re-præsentere” forhold uden for matematikken. Modellering har at gøre med al vekselvirkning mellem matematik og verden rundt om, mens repræsentation handler om hvordan faginterne sagsforhold kan repræsenteres på forskellig vis.

Beskrivelse af matematiske kompetencer

KOM-rapportens beskrivelse af matematisk kompetence, kan imidlertid ikke bare reduceres til de 11 punkter og deres indhold. KOM-rapporten opstiller derfor tre dimensioner, som kan bruges til en mere detaljeret beskrivelse af, i hvor høj grad og på hvilken måde en person besidder hver enkelt af de 8 kompetencer. De tre dimensioner er:

Dækningsgrad: En betegnelse for i hvor høj grad de forskellige aspekter af en kompetence er dækket ind hos en person. På listen i forrige afsnit var angivet 2 – 4 aspekter af hver kompetence og i selve KOM-rapporten er flere af dem underinddelt i flere aspekter. Dækningsgrad handler altså om hvor mange af de forskellige aspekter af en kompetence er til stede hos en person.

Aktionsradius: Det spektrum af sammenhænge og situationer, som en person kan aktivere en given kompetence i. Det kan fx være hvor mange matematiske stofområder en given kompetence kan aktiveres i, men også fx antallet af ekstramatematiske sammenhænge.

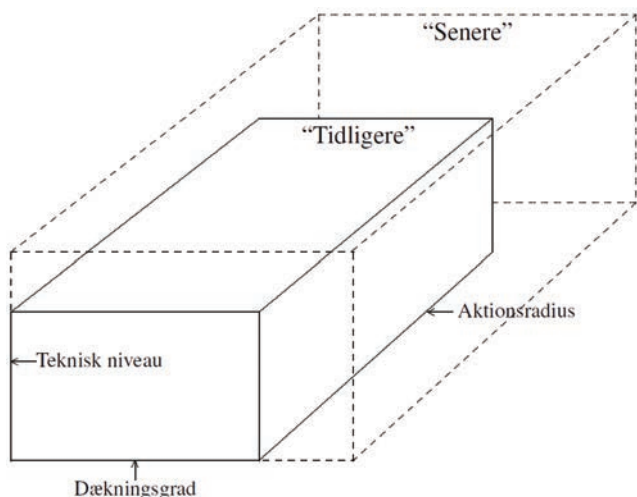
Teknisk niveau: En karakteristik af hvor begrebsligt og teknisk avancerede sagsforhold og værktøjer (i bredeste forstand) en person kan aktivere inden for den pågældende kompetence.

I KOM-rapportens retorik fremstår dimensionerne som rent deskriptive begreber over for personers besiddelse af matematiske kompetencer, men de kan formentlig med samme effekt bruges til fx læreplansanalyse og forløbs- og lektionsplanlægning.

KOM-rapporten slår også fast, at dimensionerne er partielle ikke-kvantitative ordningsprincipper. Det er altså ikke tanken at man opmåler de enkelte dimensioner med eksempelvis et procentmål. Man kan alene udtale sig om hvor vidt én besid-

delse af en kompetence i en dimension er mere eller mindre omfattende end en anden. Og det er ikke altid, at to udgaver overhovedet kan sammenlignes.

Til trods for dette, er en ambition ved de tre dimensioner netop muligheden af at opfatte besiddelsen af en matematisk kompetence, som et "volumen" udspændt af de tre dimensioner. Det gør det muligt at opfatte tilvækst i besiddelsen af en kompetence, som tilvækst i volumenet (se figur 2).



Figur 2
Visualisering af forøget kompetencebesiddelse,
(KOM-rapporten, 2002, s. 128).

I volumen-metaforen ligger en central understregning af, at en kompetence kan udbygges på tre forskellige måder, samt at hvis en af de tre dimensioner er helt fraværende i en persons kompetence, så er volumenet 0. Dimensionerne er altså begreber, der gør det muligt at beskrive udviklingen hos den enkelte elev.

Dimensionerne kan samtidig bruges til at stille skarpt på, at elevers kompetencer ikke alene handler om deres tekniske niveau, sådan som det er min erfaring, at diskussioner om matematikundervisning i gymnasiet ellers hurtigt kommer til at gøre. Begreberne kan altså bruges til at stille skarpt på, at en matematisk kompetence kan vurderes på andre parametre.

I planlægning eller beskrivelse af en undervisning, kan det endvidere være fornuftigt at kombinere kompetencerne med mere klassiske stofområder. KOM-rapporten formulerer følgende 10 stofområder som dækkende for matematik i skolesystemet og indledende videregående undervisning (for uddybning, se KOM-rapporten, s. 115-7):

- Talområderne
- Aritmetik
- Algebra
- Geometri

- Funktioner
- Infinitesimalregning
- Sandsynlighedsregning
- Statistik
- Diskret matematik
- Optimering

Man kan godt støde ind i det synspunkt, at en undervisning *enten* må tage udgangspunkt i et stofområde *eller* i en kompetence. Men KOM-rapportens holdning synes snarere at være, at stofområder er nødvendige som arenaer for udøvelse og udvikling af kompetencer.

KOM-rapporten foreslår, at man til såvel makro- som mikroplanlægning af undervisning bruger en matrixstruktur (se figur 3) med kompetencer på den ene led og stofområder på den anden, og lader hver celle i matricen potentielt udgøre et konkret samspil mellem en kompetence og et stofområde, som man bevidst kan vælge at dække ind i sin undervisning.

Kompetence/ Stofområde	Tanke- gangs- komp.	Problem- håndt.- komp.	Model- lerings- komp.	...	Hjælpe- middel- komp.
stofområde 1					
stofområde 2					
...					
stofområde n					

Figur 3
Kompetence-Stofområde-matrix (KOM-rapporten, s.114).

Kompetencer og undervisning

Endnu en misforståelse af de matematiske kompetencer man kan støde på er, at *kommunikationskompetencen* især beskriver lærerens arbejde i undervisningssituationen. Dette er en misforståelse. De otte kompetencer udgør som helhed det at kunne udøve matematisk kompetence, og således er kommunikationskompetence på lige fod med de syv andre, noget der skal udvikles hos eleven.

Det betyder dog ikke, at KOM-rapporten ikke har blik for, at det at undervise i matematik, kræver særlige kompetencer. Derfor opstiller rapporten yderligere seks kompetencer særligt knyttet til det at undervise i matematik. Disse seks matematikdidaktiske og -pædagogiske kompetencer er:

Læseplanskompetence: At kunne vurdere og udforme læseplaner.

Undervisningskompetence: At kunne udtænke, tilrettelægge og gennemføre undervisning.

Læringsafdækningskompetence: At kunne afdække og fortolke elevernes læring.

Evalueringskompetence: At kunne afdække, vurdere og karakterisere elevernes faglige udbytte og kompetencer.

Samarbejdskompetence: At kunne samarbejde med kollegaer og andre om undervisningen og dens rammer.

Professionel udviklingskompetence: At kunne udvikle sin kompetence som matematiklærer.

Disse seks kompetencer knyttet til det at være matematikunderviser har, i modsætning til de 8 egentlige faglige kompetencer (som en matematikunderviser naturligvis også må besidde i et passende omfang), efter mit indtryk kun fået en stærkt begrænset opmærksomhed i de sidste 20 år.

De didaktisk/pædagogiske kompetencer er langt mindre udfoldet i rapporten end de faglige kompetencer, men var måske et sted hvor den didaktiske udvikling og tænkning med fordel kunne sætte ind, så vi i endnu højere grad får sat fokus på, at faglig kompetence er en nødvendig, men langt fra tilstrækkelig, betingelse for afvikling af god undervisning.

Og dette leder os frem til et sidste spørgsmål: Hvad kan KOM-rapporten overhovedet bidrage med til en almindelig undervisers arbejde? Svaret er vel, at den først og fremmest leverer et sprog, som gør det muligt for os som professionelle undervisere at tale sammen om det vi laver, uden kun at skulle tænke i rent matematisk stof. Deri ligger også at kunne tale med undervisere fra andre uddannelsesniveauer.

Begrebet ”matematisk kompetence” forsøger altså at udvide det at kunne matematik fra ”bare” at være en samling konkrete færdigheder i løsning af bestemte opgaver, til at være en handleparathed overfor bestemte typer af situationer. Så for os som undervisere giver det en potentiel mulighed, for at udvide vores forståelse af, hvad det ”at kunne matematik” dækker over.

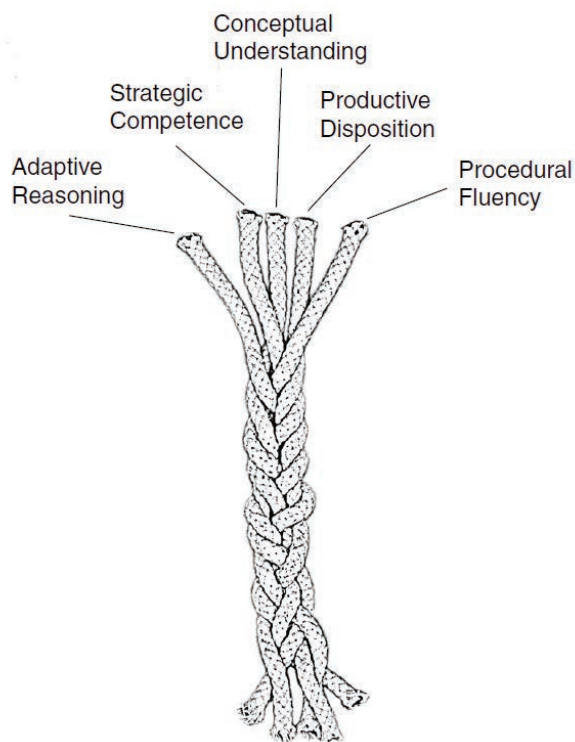
Et oplagt spørgsmål her er, om KOM-rapporten giver det eneste bud på et sådan begrebsapparat, og hvis ikke, om det giver det bedste bud. Der findes mindst ét andet bud, som blev udviklet i USA stort set samtidigt med KOM-projektet i Danmark.

I november 2001 udsendte National Research Council rapporten ”Adding it Up”³⁾, udarbejdet af Mathematics Learning Study Committee, med professor i matematikkens didaktik *Jeremy Killpatrick* som formand og en af forfatterne. Rapporten havde især til formål at beskrive, hvad der kan forstås ved *mathematical proficiency*.

Rapporten beskriver matematisk kompetence som en fletning af fem tråde (”strands”). Metaforen med en fletning (se figur 4) skal vise, ligesom kompetenceblomsten, at faget på den ene side meningsfuldt kan deles op i mindre dele uafhængigt

af stofområder, men at disse på den anden side er så sammenhængende, at de kun giver rigtig mening som en del af helheden.

De fem tråde repræsenterer 1) *Addaptive Reasoning*, 2) *Strategic Competencies*, 3) *Conceptual Understanding*, 4) *Productive Disposition* og 5) *Procedural Fluency*. Jeg vil ikke her gå nærmere ind i disse fem begreber, blot nævne deres eksistens. De er dog især skabt til det amerikanerne kalder ”grade pre-K to 8” (før-skole til 8. årgang af grundskolen).



Figur 4
Mathematical Proficiency som en fletning af fem tråde
(*Adding it Up*, side 117).

KOM-rapporten, ”Adding it Up” og andre didaktiske tekster, med begreber til at beskrive det at besidde matematisk kompetence, er jo i sidste ende kun noget værd, hvis de bliver omsat til bedre matematikundervisning i hverdagen. Så det er os som praktikere, der må tage begreberne til os. Jeg har forsøgt her at genopfriske dem hele vejen rundt – nu håber jeg at flere kan bruge dem i praksis.

En opgave at kaste sig over er at få formuleret, hvordan KOM-rapportens kompetencer passer ind i en matematik-virkelighed, hvor computeren spiller en stadigt voksende rolle. Hvad betyder dette, ikke bare for hjælpemiddelkompetencen, men også for de syv andre. Den udvikling i computerbrug vi har set, især siden 2005, havde KOM-rapporten trods alt ikke mulighed for at forholde sig til.

³⁾ Rapport ”Adding it Up” kan downloades gratis fra nap.edu/catalog/9822/adding-it-up-helping-children-learn-mathematics