Differentialregning på B–niveau

Jan Agentoft Nielsen, Horsens Gymnasium

Vi har i gymnasiet tradition for at introducere differentialkvotienten som grænseværdien af differenskvotienten. Denne tilgang er meget svær for især de svage elever, selvom vi tager en intuitiv tilgang til grænseværdibegrebet. Mange elever kan højst stræbe efter at kunne lære at huske nogle remser udenad, så det kan se ud som om, de har bevist en regneregel eller har bestemt en afledt funktion. De mange begreber står sammen med omskrivninger på abstrakte brøker i vejen for en forståelse af, hvad der foregår.

I lyset af vores udfordringer på B–niveau har jeg som et udviklingsprojekt under Matematiklærerforeningen arbejdet med at finde på en tilgang til differentialregning, der i højere grad er forståelig for især svage elever.

Resultatet er blevet til et kort undervisningsmateriale med en helt anden tilgang uden brøker og indsættelse af bogstavudtryk i funktioner. Idéen minder om den traditionelle i den forstand, at vi tager en stringent definition og reducerer den til noget mere intuitivt.

Vi starter med følgende definition af differentiabilitet, der naturligvis er ækvivalent med den klassiske:

Definition
En funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ kaldes differentiabel i x_0, hvis der findes en lille–*o*–funktion og et tal, så

$$f(x) = tal\cdot(x-x_0)+f(x_0)+o(x-x_0)$$

Tallet kaldes i givet fald differentialkvotienten i x_0.

En lille–*o*–funktion er en funktion, der er kontinuert i 0, og

som opfylder at $\dfrac{o(x)}{x}\to 0$ for $x\to 0$.

Ved første øjekast virker denne definition slet ikke gymnasieegnet, men ligesom vi gør den traditionelle mere spiselig ved at smide noget præcision overbord ved at tage en intuitiv tilgang til grænseværdibegrebet, kan vi gøre denne definition yderst elevvenlig ved at tage lille–*o*–funktion ud og erstatte den med:

Mat-B Definition
En funktion kaldes differentiabel i et punkt på dens graf, hvis den bliver mere og mere lineær, når man zoomer ind omkring punktet.

Denne idé kan selv de svageste elever forstå, og de kan ved selvsyn se, at den gælder næsten overalt for alle de funktioner, vi arbejder med i gymnasiet.

Nu er tangenten ikke længere resultatet af en abstrakt grænseværdibetragtning, men blot forlængelsen af det linjestykke, man finder ved at zoome ind!

Det betyder, at vi *starter med* at tænke på tangenter som tilnærmelser til funktioner, så vi altså kan tænke på ”alle” funktioner som lineære i små stykker ad gangen, hvilket er hele essensen af langt de fleste anvendelser af differentialregning, som jo skal være vores fokus på B–niveau, jf. læreplanen for stx B under supplerende stof.

Pludselig giver det mening, hvorfor de har brugt så meget tid på lineære funktioner i udskolingen og i grundforløbet: De kan bruges til at forstå ”alle” funktioner.

Det betyder også, at beviserne bliver langt mindre abstrakte og stiller langt mindre krav til elevernes algebraiske færdigheder. For da vi nu kan tænke på funktioner som lineære funktioner i små stykker ad gangen, så skal vi bare bevise regnereglerne for lineære funktioner! Det gør opgaven med at forstå, hvad der foregår, langt mere konkret for eleverne, der for eksempel i deres CAS kan undersøge, hvad der sker med hældningen af en lineær funktion, hvis man lægger en konstant til den, eller ganger den med en konstant. Og gad vide, hvad der sker, hvis man lægger to lineære funktioner sammen?

Man kan nu først tage et konkret eksempel og så oversætte det til et bevis ved at erstatte hvert tal med et variabelnavn, noget der er utænkeligt med den klassiske tilgang. Beviset for sumreglen foregår for eksempel på følgende måde:

Hvis de to lineære funktioner har forskrifterne $f(x) = a\cdot x + b$ og $g(x) = c\cdot x + d$, så har $f + g$ forskriften

$$\begin{aligned}
&f(x) + g(x) = (a\cdot x + b) + (c\cdot x + d)\\
&= a\cdot x + b + c\cdot x + d\\
&= a\cdot x + c\cdot x + b + d\\
&= (a + c)\cdot x + (b + d)
\end{aligned}$$

som er en lineær funktion med hældning $a + c$.

En simpel anvendelse på ophævelse af plus–parenteser, ombytning på led og af den distributive lov for at få sat x uden for parentes. Sæt dig i en elevs sted og prøv at sammenligne oventående med det klassiske:

$$\begin{aligned}
&\frac{\left(f(x)+g(x)\right)-\left(f(x_0)+g(x_0)\right)}{x-x_0}\\
&=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}\\
&=\frac{f(x)-f(x_0)+g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\
&=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\\
&\to f'(x_0)+g'(x_0)\quad\text{for}\quad x\to x_0
\end{aligned}$$

Til de stærkere elever er der i materialet beviser for kædereglen og produktreglen samt et spor til den klassiske tilgang.

Materialet kan hentes gratis på mat.dk.

Matematik