Stamfunktioner til x^n

Jens Carstensen, Frederiksberg

De ubestemte integraler

$$\int x^a dx = \tfrac{1}{a+1} x^{a+1} + k \qquad (a \neq -1)$$

$$\int x^{-1} dx = \ln x + k \qquad (x > 0)$$

er velkendte. Her virker det, som om stamfunktionen $\ln x$ er en fremmed fugl blandt potensfunktionerne $\tfrac{1}{a+1} x^{a+1}$ og ikke hører hjemme i denne funktionsfamilie.

De grafiske billeder af funktionerne

$$y = \tfrac{1}{a+1} x^{a+1}$$

for forskellige værdier af a, fx a = –0,5, –0,9, –0,99, der nærmer sig –1, ser ikke ud til at nærme sig grafen for $y = \ln x$. På figuren ses således graferne for

$$f(x) = \ln x \quad \text{og} \quad g(x) = \frac{x^{-0,8+1}}{-0,8+1} = \frac{x^{0,2}}{0,2}$$

som ligger et stykke fra hinanden. Imidlertid er de afledede

$$f'(x) = x^{-1} \quad \text{og} \quad g'(x) = x^{-0,8}$$

næsten ens. Graferne for $f(x)$ og $g(x)$ afviger derfor fra hinanden hovedsagelig ved en lodret parallelforskydning.

Betragt nu graferne for

$$f(x) = \ln x \quad \text{og} \quad h(x) = \frac{x^{0,2}-1}{0,2} = g(x) - 5$$

som ser ud til at falde (næsten) sammen. Hvis vi derfor vælger at skrive

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}-1}{a+1} \qquad (a \neq -1)$$

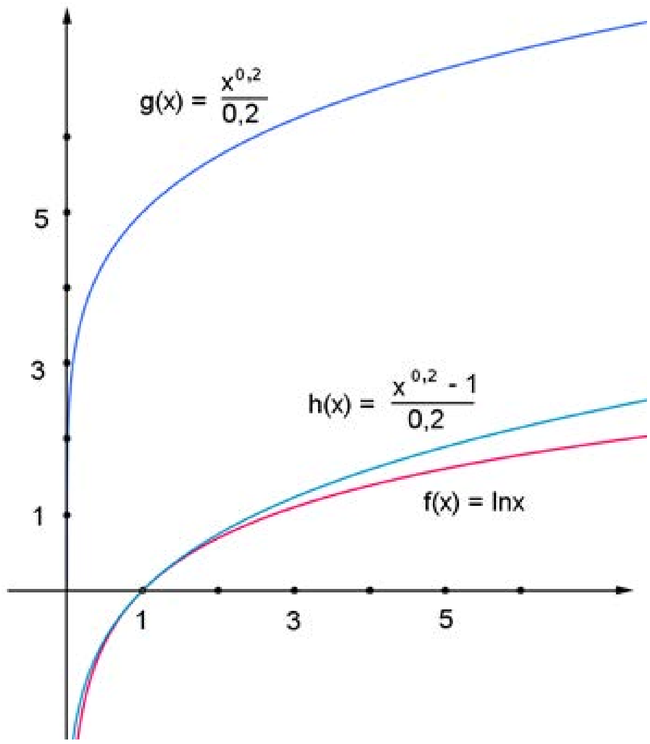
opnår vi, at de grafiske billeder af disse stamfunktioner nærmer sig grafen for $y = \ln x$, når a går mod –1. Grafen for den naturlige logaritme falder altså næsten sammen med grafen for en parallelforskudt potensfunktion.

Vi kan vise dette formelt ved at undersøge

$$\lim_{a \to -1} \frac{x^{a+1}-1}{a+1}$$

Her er det praktisk at benytte de traditionelle betegnelser og se på

$$\lim_{x \to -1} \frac{k^{x+1}-1}{x+1} = \lim_{x \to 0} \frac{k^x - 1}{x}$$



Vi omskriver sådan:

$$\lim_{x \to 0} \frac{k^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\ln k \cdot \frac{e^{x \cdot \ln k} - 1}{x \cdot \ln k} \right) = \ln k \cdot \lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t}$$

Her er brøken

$$\frac{e^t - 1}{t} = \frac{e^t - e^0}{t - 0}$$

differenskvotienten i punktet 0 for funktionen $y = e^x$, så dens grænseværdi er differentialkvotienten i 0:

$$\lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

og dermed

$$\lim_{x \to 0} \frac{k^x - 1}{x} = \ln k \qquad \text{eller} \qquad \lim_{a \to -1} \frac{x^{a+1}-1}{a+1} = \ln x$$

Graferne for stamfunktionerne

$$y = \frac{x^{a+1}-1}{a+1}$$

nærmer sig derfor til grafen for $y = \ln x$, når $a \to -1$.