



FORLAGET HAX  
 POPPELVEJ 15  
 8600 SILKEBORG  
 TLF. 86 82 01 66

KNUD ERIK NIELSEN  
 SKELLERUPVEJ 97  
 8600 SILKEBORG  
 TLF. 86 84 15 16

WWW.HAX.DK  
 HAX@HAX.DK

Endnu et temahæfte fra Forlaget Hax:

## Keglesnit - med anvendelser

Introduktion til keglesnit og teori om parabler, ellipser og hyperbler.  
 Afsnit om anvendelse af parabler, og ellipser og hyperbler til praktiske formål.



Baggrundsmateriale for større selvstændige opgaver.  
 Kan bestilles på [www.hax.dk](http://www.hax.dk).

Vi benytter lejligheden til at nævne vores nye storsælgende matematiksystem til 2017-reformen:

**Vejen til Matematik AB1+C** (Fælles begynderbog for A, B og C-niveauerne)  
**Vejen til Matematik B2 og Vejen til Matematik A2**

Papirbøgerne kan suppleres med billige pdf'er.  
 Kan bestilles på [www.hax.dk](http://www.hax.dk).



## En tilnærmet cirkelkvadratur

JENS CARSTENSEN, Frederiksberg & ALIJA MUMINAGIĆ, Frederiksberg

Traditionelt er cirkelns kvadratur problemet med passer og lineal at konstruere et kvadrat, der har samme areal som en given cirkel. Problemet er løst, idet en sådan konstruktion ikke er mulig. Det skyldes, at tallet  $\pi$  er transcendent. Vi skal her se på en særdeles nøjagtig tilnærmet konstruktion af et linjestykke med længde  $\sqrt{\pi}$ .

hvoraf

$$AF = \sqrt{\frac{40-6\sqrt{3}}{3}} \approx 3,141533339... \approx \pi$$

Til sammenligning er  $\pi \approx 3,141592654...$

En cirkel med radius 1 har centrum  $O$  og  $AOB$  er en diameter. Et punkt  $C$  på tangenten i  $B$  afsættes, så  $\angle BOC = 30^\circ$ . Så er

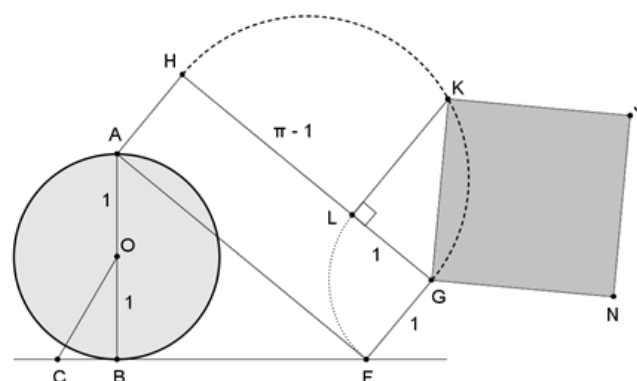
$$CB = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Punktet  $F$  afsættes på tangenten, så  $B$  ligger mellem  $C$  og  $F$  og så  $CF = 3$ . Vi har, at

$$AB = 2 \quad \text{og} \quad BF = 3 - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

I  $\triangle ABF$  får vi

$$AF^2 = AB^2 + BF^2 = 4 + \left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{40-6\sqrt{3}}{3}$$



Med  $AF$  som grundlinje afsættes rektangleret  $AHGF$ , så  $FG = AH = 1$ . På  $GH$  afsættes  $L$ , så  $GL = 1$  og den vinkelrette på

Fra 19 kr pr.  
elev pr. år

Med ABaCus får du et læringsværktøj, der gør den daglige undervisning lettere og samtidig øger dine elevers engagement i matematikken.

- ✓ Let differentieret undervisning med adaptiv opgavetræning
- ✓ Masser af færdige quizzer og arbejdsark - lige til at bruge!
- ✓ Elevmodul, hvor eleverne kan træne målrettet mod eksamen

+ meget mere...

Gratis online  
lærebog i dette  
og næste  
skoleår!



ABaCus  
www.abacus.dk

$GH$  i  $L$  skærer halvcirklen med  $HG$  som diameter i  $K$ . Så er  $LK$  som bekendt det geometriske middeltal (mellemporportional) af  $HL$  og  $LG$ , dvs.

$$LK = \sqrt{HL \cdot LG} = \sqrt{\pi - 1}$$

I den retvinklede  $\Delta LKG$  får vi derefter

$$KG^2 = LK^2 + LG^2 \approx \pi - 1 + 1 = \pi$$

Kvadratet med siden  $KG$  har derfor et (tilnærmet) areal på  $\pi$  – altså det samme som cirklen. Vi har altså opnået en ret præcis cirkelkvadratur.

Vi kan ved hjælp af disse overvejelser konstruere et polynomium med hele koefficienter, der har den fundne tilnærmede værdi for  $\pi$  som rod.

Vi sætter

$$p, q = \frac{40 \pm 6\sqrt{3}}{3}$$

Så er

$$p + q = \frac{80}{3} \quad \text{og} \quad p \cdot q = \frac{1600 - 36 \cdot 3}{9} = \frac{1492}{9}$$

Disse tal er rødder i det normerede andengradspolynomium

$$x^2 - \frac{80}{3}x + \frac{1492}{9} = \frac{1}{9}(9x^2 - 240x + 1492)$$

Polynomiet  $9x^2 - 240x + 1492$  har altså som den ene rod tilnærmelsen  $\pi^2$ . Polynomiet  $9x^4 - 240x^2 + 1492$  har altså den fundne tilnærmelse til  $\pi$  som rod. Dette er allerede påpeget af den polske matematiker *Adam Adamandy Kochanski* (1631–1700).

### Henvisninger

Jens Carstensen: *En tilnærmet konstruktion af  $\pi$* , Matematik-Magasinet 26, s. 666)

Jens Carstensen: *En tilnærmet konstruktion af  $\pi$* , Matematik-Magasinet 31, s. 870)