En tilnærmet cirkelkvadratur

Jens Carstensen, Frederiksberg & Alija Muminagić, Frederiksberg

Traditionelt er cirklens kvadratur problemet med passer og lineal at konstruere et kvadrat, der har samme areal som en given cirkel. Problemet er løst, idet en sådan konstruktion ikke er mulig. Det skyldes, at tallet π er transcendent. Vi skal her se på en særdeles nøjagtig tilnærmet konstruktion af et linjestykke med længde $\sqrt{\pi}$.

En cirkel med radius 1 har centrum O og AOB er en diameter. Et punkt C på tangenten i B afsættes, så $\angle BOC = 30°$. Så er

$$CB = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Punktet F afsættes på tangenten, så B ligger mellem C og F og så $CF = 3$. Vi har, at

$$AB = 2 \quad \text{og} \quad BF = 3 - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

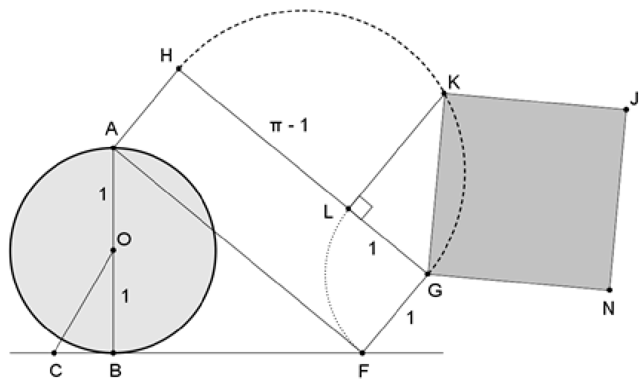
I ΔABF får vi

$$AF^2 = AB^2 + BF^2 = 4 + \left(3 - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{40 - 6\sqrt{3}}{3}$$

hvoraf

$$AF = \sqrt{\frac{40 - 6\sqrt{3}}{3}} \approx 3{,}141533339\ldots \approx \pi$$

Til sammenligning er $\pi \approx 3{,}141592654\ldots$



Med AF som grundlinje afsættes rektanglet $AHGF$, så $FG = AH = 1$. På GH afsættes L, så $GL = 1$ og den vinkelrette på

GH i *L* skærer halvcirklen med *HG* som diameter i *K*. Så er *LK* som bekendt det geometriske middeltal (mellemproportional) af *HL* og *LG*, dvs.

$$LK = \sqrt{HL \cdot LG} = \sqrt{\pi - 1}$$

I den retvinklede ΔLKG får vi derefter

$$KG^2 = LK^2 + LG^2 \approx \pi - 1 + 1 = \pi$$

Kvadratet med siden *KG* har derfor et (tilnærmet) areal på π – altså det samme som cirklen. Vi har altså opnået en ret præcis cirkelkvadratur.

Vi kan ved hjælp af disse overvejelser konstruere et polynomium med hele koefficienter, der har den fundne tilnærmede værdi for π som rod.

Vi sætter

$$p, q = \frac{40 \pm 6\sqrt{3}}{3}$$

Så er

$$p + q = \frac{80}{3} \quad \text{og} \quad p \cdot q = \frac{1600 - 36 \cdot 3}{9} = \frac{1492}{9}$$

Disse tal er rødder i det normerede andengradspolynomium

$$x^2 - \frac{80}{3}x + \frac{1492}{9} = \frac{1}{9}\left(9x^2 - 240x + 1492\right)$$

Polynomiet $9x^2 - 240x + 1492$ har altså som den ene rod tilnærmelsen π^2. Polynomiet $9x^4 - 240x^2 + 1492$ har altså den fundne tilnærmelse til π som rod. Dette er allerede påpeget af den polske matematiker *Adam Adamandy Kochanski* (1631–1700).

Henvisninger

Jens Carstensen: *En tilnærmet konstruktion af* π, Matematik-Magasinet 26, s. 666)

Jens Carstensen: *En tilnærmet konstruktion af* π, Matematik-Magasinet 31, s. 870)