Terningfordobling

JENS CARSTENSEN, Frederiksberg

De tre klassiske græske konstruktionsproblemer med passer og lineal er cirklens kvadratur (at konstruere en cirkel med samme areal som et forelagt kvadrat), vinklens tredeling (at konstruere en af en forelagt vinkels tredelingslinjer) og terningens fordobling (at konstruere kantlængden i en terning, der har dobbelt så stort rumfang som en forelagt terning). Ingen af disse tre problemer kan løses med passer og lineal inden for systemet af 'tilladte' konstruktioner.

Det sidste problem kaldes det deliske problem (efter den græske ø Delos). Efter overleveringen skulle et orakel have bedt indbyggerne på øen om at fordoble størrelsen af deres alter. Problemet går i moderne sprogbrug ud på til et givet linjestykke med passer og lineal at konstruere et linjestykke, der er $\sqrt[3]{2}$ gange så langt.

Vi skal her angive en konstruktion af terningens fordobling med en fejl på ca. 10^{-8}. Vi anfører først konstruktionen og beregner derefter fejlen.

ΔABC og ΔBED er ligebenede retvinklede trekanter, så D ligger på forlængelsen af AB ud over B. Desuden sætter vi

$$AC = CB = BE = ED = 1$$

Lad M og N være midtpunkter af AC og BC.

En cirkelbue med centrum A og radius AM skærer AB i P_1.
En cirkelbue med centrum B og radius BN skærer AB i P_2.
En cirkelbue med centrum P_2 og radius P_2E skærer BD i P_3.
Den vinkelrette i P_1 på AB skærer CE i Q.
En cirkelbue med centrum P_3 og radius P_3Q skærer AB i P_4.
En cirkelbue med centrum P_4 og radius P_4N skærer AB i P_5.
Den vinkelrette i B på AB skærer MN i R.
En cirkelbue med centrum P_5 og radius P_5R skærer AD i P_6.
En cirkelbue med centrum P_6 og radius P_6C skærer AB i P_7.
En cirkelbue med centrum P_7 og radius P_7D skærer CE i P_8.
Linjerne AP_8 og BR skærer hinanden i S.
En linje gennem S parallel med BC skærer AC i W.
Så er $AW \approx \sqrt[3]{2}$.

Vi beregner os nu frem gennem konstruktionen, idet vi bruger tilnærmede decimaltal. Eksakte værdier bliver hurtigt aldeles uigennemførlige.

Vi finder, at

$$AP_1 = AM = \tfrac{1}{2} = BP_2$$

hvoraf

$$AP_2 = AB - BP_2 = \sqrt{2} - \tfrac{1}{2} \approx 0,9142135624$$

I ΔBP_2E giver cosinusrelationen

$$P_2E^2 = BP_2^{\,2} + BE^2 - 2\cdot BP^2\cdot BE\cdot\cos 135°$$

hvoraf $P_2E = P_2P_3 = 1,398966326$ og

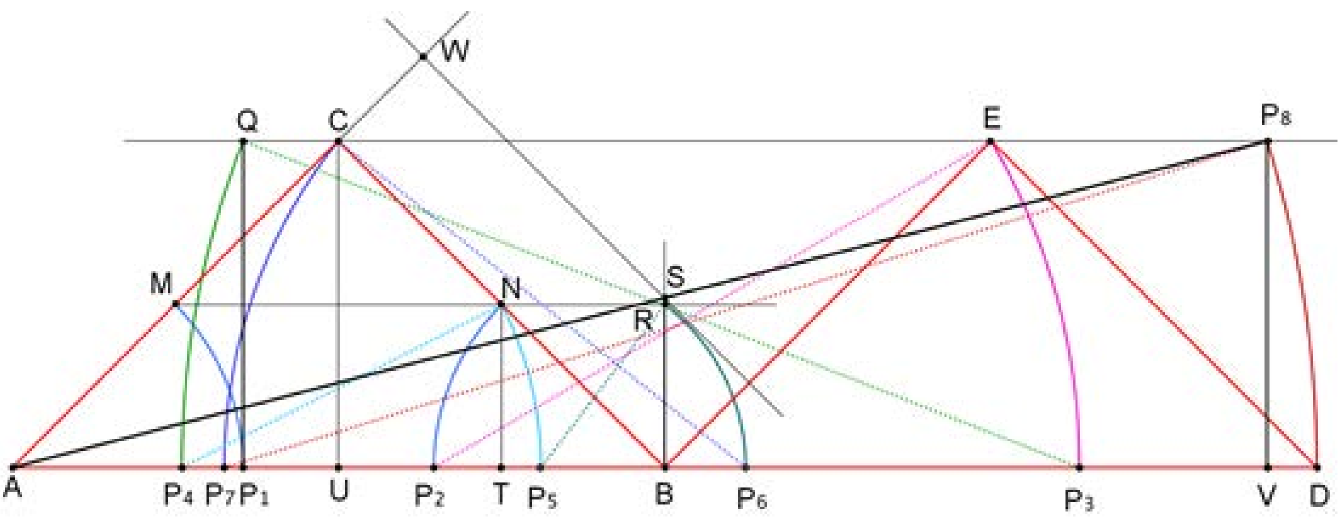
$$AP_3 = AP_2 + P_2P_3 \approx 2,313179888$$

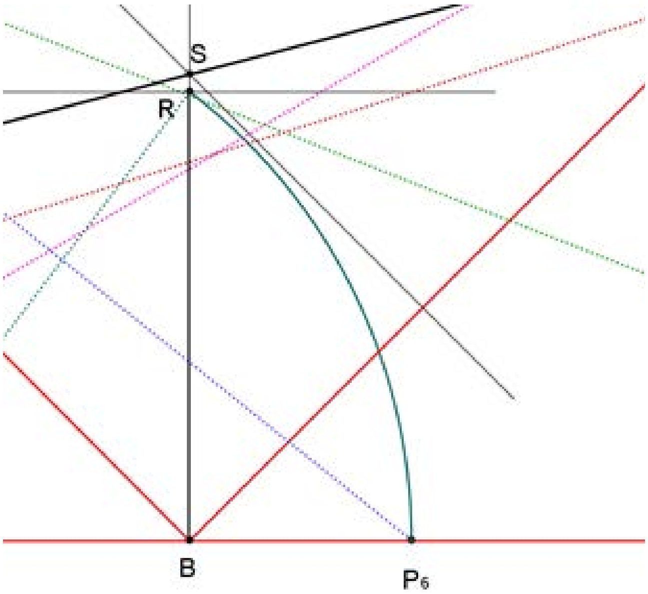
Videre er $P_1Q = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$, så vi i ΔP_1P_3Q får at

$$P_3Q_2 = P_1P_3^{\,2} + P_1Q^2 = (AP_3 - AP_1)^2 + P_1Q^2$$

så at $P_3Q \approx 1,946181211$. Dernæst er

$$AP_4 = AP_3 - P_3P_4 = AP_3 - P_3Q \approx 0,366998677$$





Lad projektionen af N på AB være T. Så er $NT = TB = \frac{1}{4}\sqrt{2}$, så

$$P_4T = P_4B - BT = AB - AP_4 - TB \approx 0{,}6936614948$$

og i ΔP_4TN får vi

$$P_4N^2 = P_4T^2 + NT^2 \quad \text{så} \quad P_4N \approx 0{,}7785668047$$

Videre er

$$AP_5 = AP_4 + P_4P_5 = AP_4 + P_4N \approx 1{,}145565482$$

og

$$P_5B = AB - AP_5 \approx 0{,}2686480804$$

Desuden er $BR = NT = \frac{1}{4}\sqrt{2}$. Så vi i ΔP_5BR får

$$P_5R^2 = P_5B^2 + BR^2 \quad \text{så} \quad P_5R \approx 0{,}4440403035$$

Så er

$$AP_6 = AP_5 + P_5P_6 = AP_5 + P_5R \approx 1{,}589605786$$

Hvis U er projektionen af C på AB, er $AU = UC = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ og

$$UP_6 = AP_6 - AU \approx 0{,}8824990043$$

så vi i ΔCUP_6 får

$$CP_6^2 = CU^2 + UP_6^2 \approx 1{,}278804493$$

og dermed

$$CP_6 \approx 1{,}130842382$$

og så er

$$AP_7 = AP_6 - P_6P_7 = AP_6 - CP_6 \approx 0{,}458763404$$

Vi finder, at

$$P_7D = AD - AP_7 = 2\sqrt{2} - AP_7 \approx 2{,}369663721$$

Lad projektionen af P_8 på BD være V. Så får vi i ΔP_7VP_8, at

$$P_7V^2 = P_7P_8^2 - P_8V^2 = P_7D^2 - QP_1^2 \approx 5{,}115306151$$

så

$$P_7V \approx 2{,}261704258$$

og

$$AV = AP_7 + P_7V \approx 2{,}720467662$$

Hældningen for linjen AP_8 er

$$m = \frac{P_8V}{AV} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{2{,}720467662} \approx 0{,}259921039$$

og

$$m = \frac{BS}{AB} = \frac{BS}{\sqrt{2}} \quad \text{så} \quad CW = \frac{BS}{\sqrt{2}} = m$$

hvoraf

$$AW = AC + CW = 1 + m \approx 1{,}259921039$$

Vi har, at $\sqrt[3]{2} \approx 1{,}25992105$, så den absolutte afvigelse er $1{,}1 \cdot 10^{-8}$.

Litteratur

Klemens Joppich: *Eine 'Würfelverdopplung' mit 0,000026 ‰ Fehler*, Praxis der Mathematik, September 1985

Jens Carstensen: *Terningens fordobling*, MatematikMagasinet 33, April 2007

Jens Skak–Nielsen: *Terningens fordobling – et 'let bevis*, MatematikMagasinet 34, Juni 2007

Jens Carstensen: *Terningens fordobling*, MatematikMagasinet 40, Juni 2008

Jens Carstensen: *Terningens fordobling 3*, MatematikMagasinet 83, August 2015

Alija Muminagić & Jens Carstensen: *Terningens fordobling 4*, MatematikMagasinet 83, August 2015

Jens Carstensen: *Terningens fordobling 5*, MatematikMagasinet 100, Oktober 2017