Ligninger fra Leonardos bibliotek

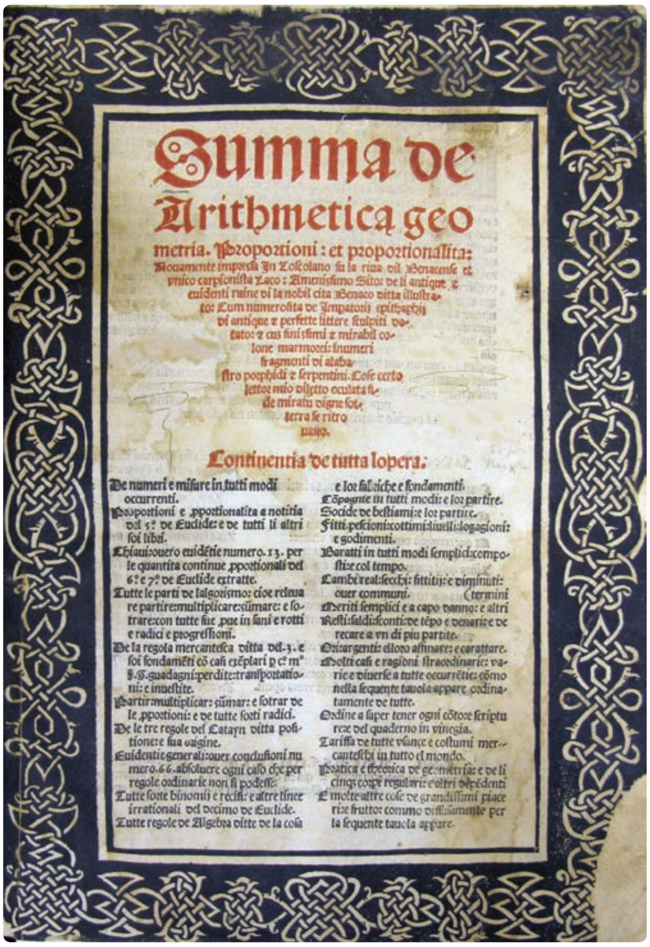
Aksel Bertelsen

Leonardo da Vincis matematikbøger

I anledning af 500–årsdagen for Leonardo da Vincis død i 1519 var der i Firenze i sommeren 2019 en udstilling med titlen *Leonardo og hans bøger*. Her kunne man bl.a. få indblik i, hvilke matematikbøger Leonardo havde haft. Hans egne eksemplarer eksisterer ikke længere, men i hans bevarede noter er der lister over bøger, som han havde anskaffet sig.

Han nævner flere abbaco–bøger, altså bøger, der behandler grundlæggende regning og anvendelser inden for handel (Bertelsen, 2014). Dette stof svarer til det, som drenge i alderen 9–12 var blevet undervist i på de såkaldte abbaco–skoler i Toscana lige siden 1300–tallet. Nogle af abbaco–bøgerne indeholdt imidlertid også mere avanceret matematik, hvor der blev brugt en form for algebra, der kaldes *retorisk algebra*, og som jeg vender tilbage til.

De fleste vil nok undre sig over, at en mand, der bliver betragtet som et af historiens største genier, har haft brug for så elementære bøger, men selvom Leonardo havde gået i en abbaco–skole, så viser hans egne notater, at han langt op i sit voksenliv har haft problemer med elementær regning (Bagni, 2006).



I 1494, hvor Leonardo var 42 år, anskaffer han sig den første trykte bog, der handler om aritmetik og algebra, Luca Paciolis *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, som netop var udgivet. Som de håndskrevne abbaco–bøger var den skrevet på talesproget, altså ikke latin, men den var lidt mere generel end de tidligere abbaco–bøger. Et eksemplar af værket blev i juni måned i 2019 solgt for ca. 8,5 millioner kroner ved en auktion. Bogen kostede også i 1494 mange penge, så det har været vigtigt for Leonardo at anskaffe den.

Nederst i venstre spalte er vist titelbladet af *Summa*, som titlen på Paciolis bog ofte forkortes til.

Luca Pacioli (c. 1447–1517) var en munk, der arbejdede som privat abbaco–lærer i mange år i forskellige italienske byer. I en periode havde han også en stilling ved universitetet i Perugia. Fra 1496 til 1499 fik Leonardo undervisning i matematik af Pacioli i Milano, og de blev nære venner.

For at illustrere, at man på Leonardos tid var i stand til at løse relativt komplicerede problemer med datidens algebra, har jeg valgt et eksempel fra *Summa*. Vi ved ikke, om Leonardo har arbejdet med det konkrete eksempel, men det er under alle omstændigheder interessant at se hvilke løsningsmetoder, der blev brugt.

Paciolis problem

I *Summa* side 91 gives følgende problem.

> Lav for mig tre dele af 13 i kontinuert proportion hvor den første ganget med de andre to, den anden med de to andre, den tredje med de to andre og disse multiplikationer lagt sammen giver 78.

At tre tal er i *kontinuert proportion* betyder, at det første tal divideret med det andet er det samme som det andet tal divideret med det tredje. Vendingen, *den første ganget med de andre to*, er en kort skrivemåde for, *den første ganget med summen af de andre to*.

Hvis de tre tal kaldes x, y og z, kan problemet med moderne notation formuleres som et ligningssystem af følgende type

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z}$$

$$x + y + z = a$$

$$x(y+z) + y(x+z) + z(x+y) = b$$

hvor $a = 13$ og $b = 78$. Vi forudsætter, at $x < y < z$.

Pacioli viser meget kortfattet, hvordan problemet kan løses, men han forklarer ikke alle detaljer. Heldigvis findes en fuldstændig løsning i en tidligere abbaco–bog fra 1463, som Pacioli uden tvivl har ladet sig inspirere af, ret meget endda. Denne bog indeholder et problem magen til Paciolis, men med tallene $a = 19$ og $b = 228$. Løsningen tilskrives Antonio de Mazzinghi (Arrighi, 1967).

Jeg vil nu i første omgang gengive Mazzinghis løsning med moderne notation. Han udleder først, at

$$x(y+z)+y(x+z)+z(x+y)=2y(x+y+z) \qquad (1)$$

altså at $228 = 2 \cdot y \cdot 19$. Det gør han ved at bemærke, dels at $xz = y^2$, da de tre ubekendte er i kontinuert proportion, dels at $x(y+z) = xy + xz$. Tilsammen får vi altså

$$x(y+z) = xy + y^2 \qquad (2)$$

På tilsvarende måde omskrives $z(x+y)$, og ialt får vi

$$x(y+z)+y(x+z)+z(x+y)=2xy+2y^2+2yz$$

Sættes $2y$ uden for parentes, får man formlen (1), og y kan isoleres i $228 = 2 \cdot y \cdot 19$, hvilket giver $y = 6$.

Til at finde x og z har man nu, at $x + 6 + z = 19$, altså at $x + z = 13$, og $xz = 6^2$. Dette giver $z = 13 - x$, og dermed $x(13 - x) = 36$, altså andengradsligningen

$$x^2 - 13x + 36 = 0$$

En af de sædvanlige formler for løsningerne giver

$$x = 13/2 \pm \sqrt{\left(13/2\right)^2 - 36}$$

altså, at x er 4 eller 9, og da x er den mindste af de tre ubekendte, er $x = 4$ og $z = 9$. Man har dermed fundet de tre ubekendte.

Retorisk algebra

I de følgende fire indrammede afsnit vises, hvordan Mazzinghi formulerer sin fremgangsmåde, som reelt er den, der blev gennemgået i det foregående. Der er tre afgørende forskelle i forhold til den moderne formulering. For det første bruges ikke et enkelt bogstav til at betegne de ubekendte; de kaldes simpelthen *den første del*, *den anden del* og *den tredje del*. For det andet er der ikke indført symboler for de fire grundlæggende regneoperationer; det betyder, at f.eks. $x \cdot y$ må skrives *den første del ganget med den anden del*. Endelig bruges der ikke parenteser. Alt må altså formuleres med ord, og heraf navnet *retorisk algebra*. Nu til Mazzinghis løsning.

> Når størrelserne er i kontinuert proportion, så er den første ganget med den tredje det samme som den anden ganget med sig selv, og dette har vi vist mange gange. Så at gange den første med de andre 2 er det samme som at gange den første med den anden og den anden med sig selv, eftersom den første ganget med de to andre er det samme som at gange den første med den anden og den første med den tredje; og at gange den første med den tredje er som at gange den anden med sig selv.

Det ses, at man bruger den distributive lov uden at nævne den eksplicit. Loven anvendes på den måde, som vi udtrykker ved at sige, at *der ganges ind i parentes*. Så udledes (1):

> Og at gange den anden med de to andre er lige så meget som at gange den anden med den første og den anden med den tredje. Og at gange den tredje del med de to andre er som at gange den anden med sig selv og som at gange den tredje med den anden. Altså disse tre multiplikationer, som er 6, er som at gange den første med den anden 2 gange og den anden med sig selv to gange og den tredje med den anden 2 gange. Så, hvis du åbner øjet godt, er dette som at gange den anden med summen af alle 3, 2 gange.

Bemærk specielt den sidste del, hvor man laver det, der svarer til at sætte et tal uden for en parentes med tre led. Forfatteren er klar over, at dette punkt er særlig svært, og også i nutidens undervisning med moderne notation kræver det øvelse at indlære den teknik. Dernæst isoleres y:

> Og at gange den anden del med summen af de 3 to gange er som at gange den anden del med det dobbelte af summen af alle 3, det vil sige så meget som at gange det dobbelte af den anden del med summen af de 3. Så, altså, ganges det dobbelte af den anden del med 19, som er summen af alle 3, får man 228. Altså ved at dele 228 med 19 får man det dobbelte af den anden del. Og af 228 delt med 19 kommer 12, og 12 er 2 gange den anden del. Altså er den anden del 6.

I den sidste del bruges en formel for løsning af en andengradsligning. Sådanne formler havde været kendt og ført videre helt tilbage fra babylonsk matematik. Man har haft en række forskellige typer af problemer, som kunne løses ved brug af en andengradsligningsformel.

> Og, dette fundet, vil der til de andre to være 13 tilbage; hvor du siger: fordi delene er i kontinuert proportion, er den første ganget med den tredje lige så meget som den anden ganget med sig selv; så 13 skal deles i to dele, så den første ganget med den anden giver 36, altså kvadratet af 6. Og til dette har man givet denne regel: halver 13, og halvdelen er 6 1/2, ganget med sig selv giver 42 1/4, ud over 36 bliver 6 1/4 tilbage, tag roden som er 2 1/2 og læg det til halvdelen af 13, altså til 6 1/2, som giver 9. Og så meget er den største del, og for den anden træk 2 1/2 fra halvdelen af 13, altså 6 1/2, og der er 4 tilbage.

Hermed er de tre dele fundet.

Det er klart, at nutidens rent symbolske algebra ikke er nær så tung, som den retoriske, der kræver større tålmodighed, koncentration og overblik, specielt ved de mere komplicerede problemer. Sandsynligvis ville Leonardo derfor være kommet længere med matematikken, hvis han havde kendt til symbolsk algebra. På den anden side bør man nok ikke overse, at den retoriske algebra var et afgørende trin på vej mod den symbolske. Man kan godt forestille sig, at det for det enkelte menneske også kan være et nyttigt trin på vejen at se simple ligninger formuleret og løst retorisk.

Jeg vil slutte af med endnu et problem fra *Summa*, men denne gang uden at give løsningen; den kan læseren selv prøve at finde:

> Find tre tal i kontinuert proportion, hvis kvadrater tilsammen er 84, og hvis sum er 14.

Referencer

Arrighi, G. (red.) (1967). *Antonio de' Mazzinghi, Trattato di Fioretti*. Pisa, Domus Galilæana.
Bagni, T.G. og D'Amore, B. (2006). *Leonardo e la Matematica*. Firenze, Giunti.
Bertelsen, A. (2014). *Matematik i middelalderen. Abbaco–kulturen i Firenze*. København, Lindhardt og Ringhof.
Pacioli, L. (1494). *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*. Venedig, Paganino de Paganini.
Vecce, C. (2017). *La biblioteca perduta. I libri di Leonardo*. Roma, Salerno Editrice.

Er det svært at huske decimalerne i π eller e?

Jens Carstensen, Frederiksberg

Slet ikke. Man kan blot fremsige en af følgende dybsindige sætninger og notere antallet af bogstaver i hvert ord:

May I have a large container of coffee?
3 1 4 1 5 9 2 6

Sir, I have a radio somewhere in Peggy's black and white suitcase
3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 8

How I need a drink, alcoholic of course, after the heavy chapters involving quantum mechanics
3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 8 9 7 9

Ser I ikke, I tåber, hvorledes en simpel remse kan klare cirklens kvadratur?
3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 8 9

We require a mnemonic to remember a constant log
2 7 1 8 2 8 1 8 3