

Problemer til undervisningen i matematik

LINE KABELL NISSEN, Alssundgymnasiet, og JEANETTE MARIE AXELSEN, Midtsjællands Gymnasium

Undersøgelser baseret matematikundervisning er nu skrevet ind i læreplanerne for 2017, og selvom eksperimenter i matematik og projektarbejde har været med siden 2005, så tilføjes nye dimensioner til matematikfaget ved at eleverne skal arbejde undersøgelsesbaseret. Spørgsmålet er, hvad er undersøgelsesbaseret matematikundervisning, og hvad kan denne tilgang byde på i forhold til elevernes tilegnelse af og oplevelser med faget?

I september 2016 startede et EU-projekt op, hvor Matematiklærerforeningen i samarbejde med KU gik med for at udvikle og udbrede materialer til undersøgelsesbaseret matematikundervisning (IBMT: Inquiry Based Math Teaching). I MERIA¹⁾ Håndbog i undersøgelsesbaseret matematikundervisning, som er en guide skrevet i forbindelse med projektet, kan man se en form for definition på, hvad det vil sige at arbejde undersøgelsesbaseret, og her er det helt centrale, at der arbejdes med problemer:

*"I IBMT er et problem mere end en bestemt opgave, øvelse eller aktivitet. Et problem er åbent, forstået på den måde, at det fordrer, at eleverne eksperimenterer, fremsætter hypoteser om mulige løsninger, kommunikerer hypoteser og mulige løsningsstrategier og måske stiller yderligere spørgsmål, som skal undersøges som en del af problemløsningen."*²⁾

I det følgende vil 2 eksempler på undersøgelsesbaseret undervisning blive præsenteret, hvor den didaktiske teori bagved er Teoretiske Didaktiske Situationer (TDS), som går tilbage til Guy Brousseau, og som er en af de to tilgange, som ligger til grund for materialerne i MERIA-projektet.

Hvilken mobiltelefon vil du købe?

Elever i 1.g på Alssundgymnasiet i Sønderborg møder op til 2. modul i matematik i august 2019 og bliver spurgt:

"Du skal købe en ny mobiltelefon og vil gerne vælge den billigste. Hvilken telefon skal du vælge, hvis du vil have den billigste?"

Herefter får eleverne tre tilbud, som dem vi ofte møder i reklamer på nettet eller andre steder. Eleverne, der sidder i grupper af 2 – 3, får overdraget problemet samtidig med, at de får oplyst, at de må bruge papir og blyant, deres computer og tavler til at skrive på, og at de får 20 minutter til at komme med et bud, som skal præsenteres for resten af klassen.

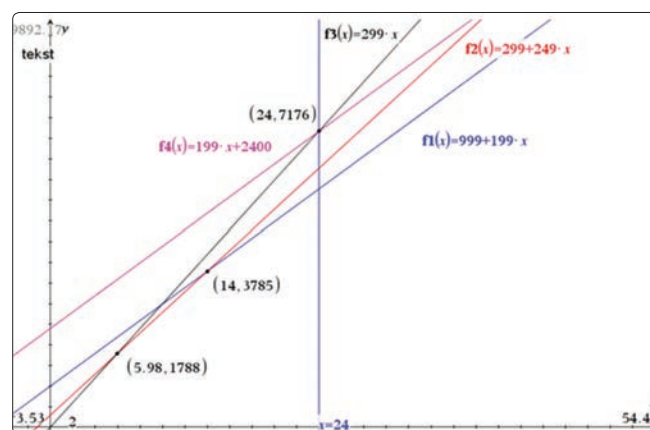
Eleverne går i gang med arbejdet, og da ingen rigtig kender hinanden endnu, så er der gennem arbejdet god mulighed for at lære hinanden at kende, og de er nødt til at kommunikere, for som fremmede blandt hinanden, er der endnu ikke opstået

Sony Xperia 10	Samsung Galaxy A40	Apple iPhone 7
Kontant: 999,- Pris pr måned: 199,-	Kontant: 299,- Pris pr måned: 249,-	Kontant: 0,- Pris pr måned 199,- De første 24 måneder: +100,- pr måned.

et indforstået sprog eller en rollefordeling. Deres lærer Line kender dem heller ikke endnu, så mens eleverne arbejder, går hun rundt og iagttager deres proces. Mens de undersøger, diskuterer og prøver nogle forskellige strategier af, får Line nu et indtryk af, hvordan eleverne arbejder og hvordan de er og fungerer fagligt. Nogle elever spørger ind til deres løsning, men Line opmuntrer dem blot til at fortsætte deres arbejde uden at pejle dem i nogen bestemt retning. En anden gruppe får pludselig brug for at få hjælp til deres CAS-værktøj, der driller, og Line hjælper dem på vej, så det kommer til at virke for dem. Den undersøgende proces er vigtig i dagens arbejde, da det er her eleverne opnår en personlig viden om de lineære funktioner, som Line har som sit faglige mål med timen.

Da de 20 minutter er gået beder Line 4 grupper om at præsentere deres arbejde. Det kan for eleverne virke lidt tilfældigt, hvem hun beder om at sige noget først, men Line har nøje udvalgt rækkefølgen, så der kommer en progression i fremlæggelserne – fra de mest lavpraktiske løsninger, hvor elever f.eks. har prøvet at beregne prisen for de forskellige telefoner for et konkret antal måneder, eller ligefrem lavet en tabel for hver telefon og betragtet spørgsmålet ud fra deres tabel, og frem mod de mere abstrakte løsninger, hvor elever har lavet nogle lineære funktioner og indtegnet graferne i et koordinatsystem som vist nedenfor.

Det er 2/3 af klassen, der er nået frem til et svar. Den sidste tredjedel blev udfordret af iPhone-tilbuddet og hvordan det skulle forstås med de 24 måneder, hvor man betaler 100 kr.



ekstra pr. måned. Under fremlæggelserne virker eleverne rimeligt afslappede, da ingen kender hinandens niveau endnu, så på forunderlig vis er der en afslappet atmosfære i klassen.

Line beder nu eleverne om i deres gruppe at kigge på, hvilke ligheder og forskelle der er på de forskellige løsninger, der er præsenteret ved tavlerne, og ud fra dette forbedre deres egen løsning. Eleverne får 10 minutter til arbejdet, og de går i gang med at se på, hvordan deres egen løsning nu kan forbedres, ud fra det de har set ved tavlen. På skrift formulerer de deres forbedrede løsning og skal også her forklare, hvordan de har brugt de andres løsninger i deres nye version. Hvis eleverne bliver færdige hurtigt, opmuntrer Line dem til at få så mange observationer som muligt med fra de andres svar i deres eget arbejde.

Hen imod timens slutning samler Line trådene sammen med udgangspunkt i de løsninger, der blev præsenteret ved tavlen. Her kommer det frem, at der ikke kun er én løsning på problemet, idet det kommer an på, hvor mange måneder man forventer at have sin telefon. Herved opstår der et behov for at kunne notere en stykkevist defineret funktion, hvor eleverne nu ser, hvordan antallet af måneder de forventer at have telefonen hænger sammen med forskriften og graferne, og at man kan tegne en funktion i CAS-værktøjet vha. en gaffelforskrift, som virker mere overskuelig end de mange grafer, som kom frem i deres undersøgelse. Klassen vender endelig som det sidste tilbage til deres oprindelige spørgsmål – hvilken telefon skal vælges, og de er nu klar over, at skal den være billigst vil det afhænge af, hvor længe de forventer at skulle have deres telefon.

Hvor vil jeg arbejde?

I 1.z på Vordingborg Gymnasium & HF kom de tilbage fra juleferie og blev mødt med spørgsmålet: ”Hvis disse tre tabeller viser månedslønnen for medarbejderne i hhv. firma A, B og C, hvilket firma ville I så helst arbejde for, når I en dag bliver færdig med jeres uddannelse? I skal argumentere for jeres svar!”

Klassen får de tre tabeller i en Excel-fil, og de får at vide, at de må bruge papir og blyant, deres computer og hvad de tænker kunne være nødvendigt for at svare. Deres lærer Jeanette beder dem gå i deres netværksgrupper, som lige er blevet skiftet, så alle sidder i nye arbejdsgrupper på 4.

Firma A		Firma B		Firma C	
Medarbejder	Løn	Medarbejder	Løn	Medarbejder	Løn
1	5211	1	4731	1	2646
2	2016	2	4701	2	1686
3	3579	3	5778	3	2115
4	4794	4	5979	4	1713
5	2697	5	4617	5	1677
6	1842	6	5160	6	2940
7	2154	7	4641	7	2595
...

Udsnit af de tre tabeller, som eleverne fik som Excel-fil.

Eleverne får ca. 20 minutter inden de skal præsentere deres valg af arbejdsplads ved tavlen for de andre i klassen. De er kun 20 i klassen, så det passer fint med 5 grupper. Mens eleverne sidder og arbejder går Jeanette rundt og iagttager, hvem der laver hvad. Emnet deskriptiv statistik har ikke været gennemgået før, så eleverne benytter deres viden tilbage fra grundskolen. Nogle elever kender til boksplot og laver boksplot for hvert firma, og de beregner også middeltallet for hvert firma. En anden gruppe vælger at gruppere lønningerne i 3 indkomstgrupper, men går lidt i stå i forhold til, hvordan de så skal få det præsenteret grafisk. De vælger derfra at se på, hvor mange procent af medarbejderne der tjener over en vis grænse, i de tre firmaer, og hvor mange procent af medarbejderne der tjener under en anden af dem fastsat grænse. To af grupperne får den ide at lave diagrammer i Excel. Ud af 1. akse har de tallene fra 1 til 50 og op ad 2. akse månedslønnen. De får et diagram for hvert firma, der viser, at firma B har meget små udsving mellem lønningerne, og nogle i gruppen mener derfor, de skal vælge dette firma. Men en af drengene vil hellere have firma C, da han ser, at selvom langt de fleste tjener noget mindre end i firma B, så er der 3 medarbejdere, der scorer pænt højt, så hvis man er ambitiøs og vil frem i firmaet, så er der også et lønningsperspektiv, mener han. Ved fremlæggelserne kommer eleverne til at diskutere valget mellem de to firmaer, og de når frem til, at ud fra gennemsnittet ville firma B være bedst, men vil man score kassen, så er den højeste løn noget bedre i firma C.

Ved timens afslutning forsøger Jeanette at trække trådene sammen ved at se på, hvordan de forskellige præsentationer viser forskellige mål for datasættene, og at gruppen, der grupperede lønningerne, var inde omkring nogle begreber, som klassen kom til at møde nogle lektioner længere fremme i forløbet. Grupperne med diagrammerne, hvor de havde kigget på medarbejdernummeret som en x -værdi kunne se, at variabelen medarbejdernummer måske ikke var så interessant, da man jo i princippet kunne have valgt en anden rækkefølge af medarbejderne, og så kunne grafen måske have set anderledes ud. Her var de tilfældigvis opstillet efter lønindkomst. Begreber som median og kvartiler blev også defineret ud fra elevernes arbejde, og eleverne kunne se, at middeltallet alene måske ikke var nuanceret nok, hvis man skulle træffe en beslutning, som også handlede om fremtiden i firmaet.

Hvorfor skal jeg vælge den undersøgende tilgang?

Som undervisere står vi hver gang, vi skal forberede en lektion, over for en lang række valg og spørgsmål. Det oftest stillede er ”Er jeg sikker på at eleverne faktisk får lært det, jeg har planlagt de skal lære?” og efter at have læst eksemplerne kunne et af dem være: ”Hvorfor skulle jeg vælge den undersøgende tilgang?” Man kunne vende det første spørgsmål rundt engang imellem: ”Lærer mine elever det de skal, når jeg har stået og vist dem, hvordan de skal bruge en formel, aflæse forskriften for en lineær funktion på en graf eller ud fra en tabel

og de så løser nogle opgaver bagefter? Er det klart for dem, hvorfor de skal gøre, som de gør?” Desværre bliver svaret på dette ikke altid ja. Gang på gang kan man blive overrasket over, at selvom man selv synes, man har fundet de vise sten, og nu må det da lykkes, så er det stadig kun de bedste elever, der er med. Svaret på andet spørgsmål er til gengæld, at der er andre gevinster at få ved at arbejde undersøgende.

Eleverne bliver bedre til at kaste sig ud i at gøre noget med og i matematik, og det at skulle fremlægge og formulere som en fast del af undervisningen er nogle kompetencer vi i de nye eksamensformer som fx gruppedelsprøven ved den mundtlige eksamen, kan få gavn og glæde af. Eleverne får også gjort deres viden, opnået fra undersøgelserne, til en personlig viden i og med de selv har fundet frem til den, og ved at læreren trækker tråde mellem de forskellige fremlæggelser, så kan eleverne se, hvordan deres eget arbejde er en del af det hele.

Hvad med det faglige niveau? Vores oplevelser med den undersøgelsesbaserede undervisning er, at eleverne ofte kan mere, end vi regner med, og de er også kreative i deres tilgang. Vi har ikke altid styr på, hvad de når frem til i den fase, hvor de undersøger uden lærerens indflydelse, men det faglige man får frem i fremlæggelserne og i den sidste runde, hvor læreren samler op er fuldt ud på højde med den mere traditionelle undervisning.

At arbejde ud fra TDS-tilgangen har den interessante side, at man som lærer næsten kan blive forsker i sit eget undervisningslokale. Under planlægningen af sin undervisning er det nemlig vigtigt at prøve at se for sig, hvilke strategier eleverne ville kunne finde på at vælge. Vælger de noget helt andet, så opnår man nye erfaringer i forhold til, hvordan eleverne arbejder og tænker i processen. Hvis man når frem til i sin forberedelse, at der kun ville være én vej for eleverne at gå, så er det problem, som man overvejede til timen, ikke åbent nok, og man må finde frem til, hvad der skal justeres, så eleverne får flere veje at gå. Så selvom læreren bare går rundt og observerer eleverne og lader dem formulere deres viden, så er man som lærer på arbejde alligevel, som observatør og som den, der orkestrerer fremlæggelserne. Partituret ligger foran, så man kan se hvilke strategier der er i spil, og man kan derfor også have forberedt hints til metoder og forskellige spørgsmål man ville kunne stille eleverne, hvis de går i stå – uden at give dem løsningen eller fratage dem muligheden for at forsætte det undersøgende arbejde.

Og når det er prøvet én gang er man også selv blevet skarpere på problemet og de muligheder det giver.

Skal eleverne så arbejde undersøgelsesbaseret hele tiden? Bare fordi den undersøgelsesbaserede tilgang vinder frem, så skal vi stadig overveje, hvornår vi vil arbejde undersøgende med eleverne. Hvis ikke der er et problem, som giver elever-

ne mulighed for at undersøge og formulere, uden man som lærer er nødt til at stilladsere eller give konkrete anvisninger frem mod en løsning, så kan man måske lige så godt vælge at arbejde mere traditionelt – dvs. at de træner en metode gennem opgaveregning.

Som landet ligger lige nu, så skal der udarbejdes en masse gode eksempler på problemer, som giver anledning til undersøgelsesbaseret undervisning. Der er allerede en hel del som kan findes på <https://meria-project.eu/activities-results/meria-teaching-scenarios>.



På en konference i Zagreb (Kroatien) i maj, som var afslutningen på EU-projektet MERIA, og hvor vi var 5 lærere og 2 fra MERIA-arbejdsgruppen af sted, blev vi præsenteret for nye ideer, som vi indbyder til at man kan undersøge nærmere fx:

- A Et flyselskab har 100 sæder. Da ikke alle passagerer dukker op, så vælger flyselskabet at sælge flere billetter end de har sæder, for at være sikre på at flyve med alle sæder besat. Hvor mange billetter skal flyselskabet sælge for at alle sæder er besat og ingen passagerer vil blive afvist ved gaten?
- B En snor på 1 meter skal klippes således, at den ene del af snoren danner en ligesidet trekant og den anden del danner et kvadrat. Hvor skal man klippe snoren, så det samlede areal af de to polygoner bliver mindst muligt?
- C I grupper skal eleverne spille spillet vektorræs. Enten på papir eller på hjemmesiden harmmode.com. Efter spillet skal de finde ud af, hvem der kørte den korteste rute. Og de skal også finde ud af, hvordan de har kørt, og så prøve at spille det samme spil mod en anden klassekammerat og se, om de opnår samme placering som i første spil, og hvordan ruten længde er sammenlignet med de nye modstanderes.

¹⁾ MERIA er navnet på EU-projektet, og er en forkortelse for Mathematics Education – Relevant, Interesting and Applicable. Læs mere om projektet på [Meria-project.eu](https://meria-project.eu). Her finder du også fem lektionsplaner inden for emnerne deskriptiv statistik, stykkevist definerede funktioner, kvadratiske funktioner, introduktion til differentialregning og arealforhold. Materialerne er udviklet i samarbejde med gymnasielærere og forskere fra Kroatien, Slovenien, Holland og Danmark.
²⁾ Winsløw, Carl (red.), *MERIA håndbog i undersøgelsesbaseret matematikundervisning*, 2017