Format A4 og irrationalitet af $\sqrt{2}$

JENS CARSTENSEN, Frederiksberg

Et velkendt bevis for, at $\sqrt{2}$ er irrational gør brug af, at der for hele positive tal a og b gælder, at

$$\text{hvis } \sqrt{2} = \tfrac{a}{b}\text{, er også } \sqrt{2} = \tfrac{2b-a}{a-b} \qquad (1)$$

Hvis nævneren b er valgt mindst mulig, får vi $\sqrt{2}$ fremstillet som en brøk med nævneren $a - b$, hvor $a - b < b$ i strid med, at b var den mindst mulige nævner.

At (1) gælder følger algebraisk af, at

$$\frac{2b-a}{a-b} = \frac{2-\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}-1} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}$$

For papirformaterne i A–serien gælder som bekendt, at forholdet mellem længderne af den lange og korte side er $\sqrt{2}$, hvilket netop sikrer, at man ved successive halveringer af arkene stedse får ark, der er ligedannede med det oprindelige.

Vi skal her se på nogle anvendelser af papirformatet A4, der på forskellige geometriske måder illustrerer sammenhængen (1).

På figur 1 er ΔABC retvinklet og ligebenet med kateterne $CA = CB = b$ og hypotenuse $AB = a = b\cdot\sqrt{2}$.

En cirkelbue med B som centrum og BC som radius skærer AB i D, så $BD = b$ og $AD = a - b$. Tangenten til cirkelbuen i D skærer AC i E. Så er ΔADE retvinklet og ligebenet, så $DE = a - b$.

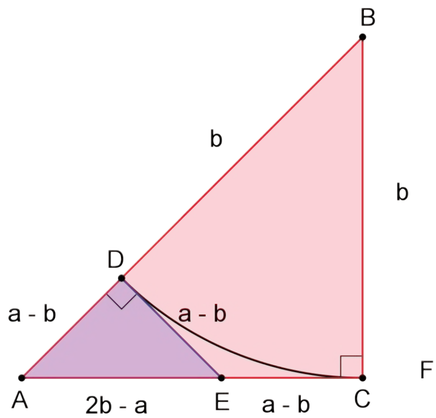

Fig. 1

Derefter er EC og ED begge tangenter til cirkelbuen, så $DE = EC = a - b$, og dermed

$$AE = AC - EC = b - (a - b) = 2b - a$$

Da ΔABC og ΔAED er ensvinklede, er så

$$\frac{a}{b} = \frac{2b-a}{a-b}$$

På figur 2 ses to ark A4 med sidelængder b og $a = b\cdot\sqrt{2}$, der har et fælles hjørne P. Hjørnet Q på det øverste ark ligger på langsiden af det nederste ark. Så vil det øverste arks kant gå gennem det nederste arks hjørne R, fordi a og b er sider i en retvinklet trekant. Siderne får de mål, der er angivet på figuren. Ensvinklede trekanter giver igen, at

$$\frac{a}{b} = \frac{2b-a}{a-b}$$

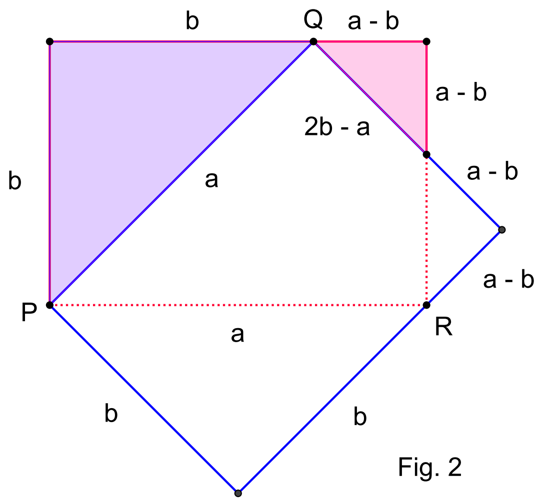

Fig. 2

På figur 3 er det øverste højre hjørne P af A4–arket foldet ned på den nederste langside i Q. Igen giver ensvinklede trekanter, at

$$\frac{a}{b} = \frac{2b-a}{a-b}$$

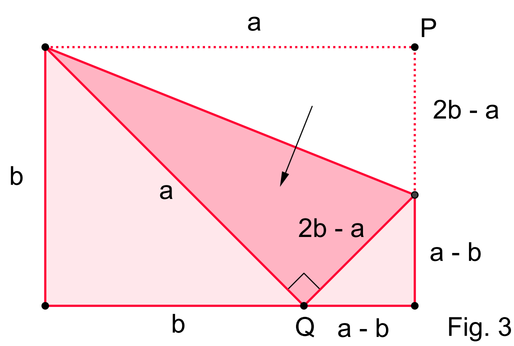

Fig. 3

På figur 4 er foretaget to foldninger af et ark A4. Først foldes nederste højre hjørne Q op på den modstående langside i Q_1. Derefter foldes nederste venstre hjørne P op i øverste venstre hjørne P_1. Med figurens betegnelser er ΔPBP_1 retvinklet og ligebenet med hypotenusen $PP_1 = a$. Da $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$, er så

$$P_1B = PB = \frac{a}{\sqrt{2}} = b$$

Dermed er

$$DB = PD - PB = a - b$$

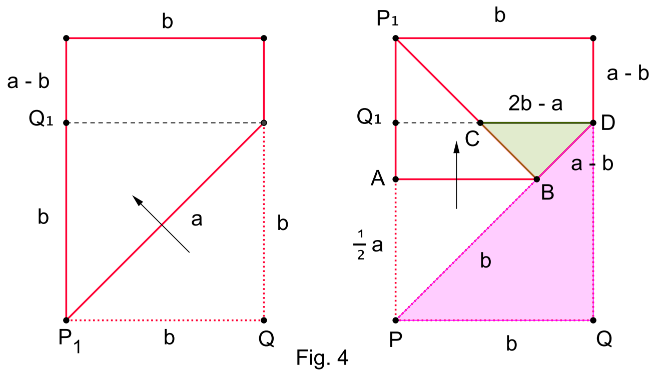

Fig. 4

Da $P_1Q_1 = a - b$ og ΔP_1Q_1C er ligebenet og retvinklet, er $Q_1C = a - b$ og dermed

$$CD = Q_1D - Q_1C = b - (a - b) = 2b - a$$

Som før er ΔBCD og ΔQPD ensvinklede, så

$$\frac{a}{b} = \frac{2b - a}{a - b}$$

På figur 5 er ΔABC retvinklet med $AC = BC = b$ og $AB = a$. Vi anbringer A4–ark som $\square BCDE$, $\square DGFH$ og $\square AJKB$. Forlængelsen af AB går gennem F og $BL = LF = a - b$.

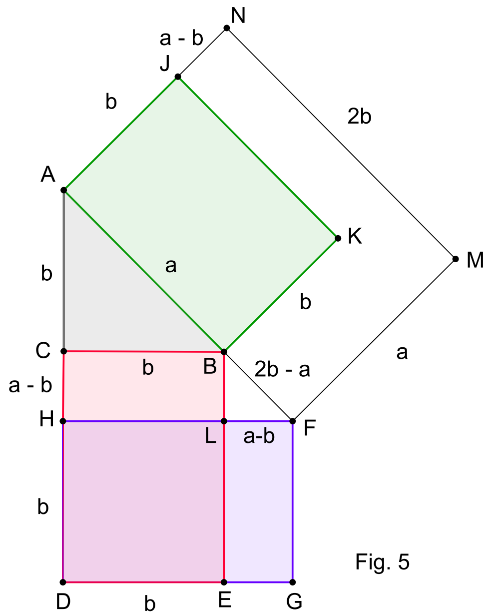

Fig. 5

Da ΔACB og ΔAHF er ensvinklede og $a = b \cdot \sqrt{2}$, er

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AH}{AF} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b}{a} = \frac{a}{AF} \quad \Leftrightarrow \quad AF = \frac{a^2}{b} = a\sqrt{2} = 2b$$

Dermed er

$$BF = AF - AB = 2b - a$$

Da ΔBLF og ΔACB er ensvinklede, får vi igen, at

$$\frac{a}{b} = \frac{2b - a}{a - b}$$

I øvrigt er $\square ANMF$ af format A3.

På figur 6 foldes nederste højre hjørne Q op på den modstående langside i Q_1 Derefter foldes øverste venstre hjørne P_1 ned på den vandrette linje Q_1R i P_2. Så opstår et rektangel i øverste højre hjørne med sidelængder $a - b$ og $2b - a$.

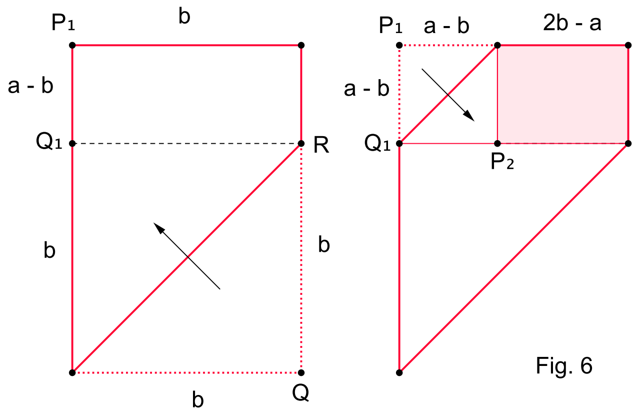

Fig. 6

Da A4, A5 og A3 er ligedannede rektangler, er

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{\frac{1}{2}a} = \frac{2b}{a}$$

Da $\frac{2b}{a} = \frac{a}{b}$, gælder efter en regneregel for brøker (tæller minus tæller og nævner minus nævner) også

$$\frac{2b - a}{a - b} = \frac{a}{b}$$

Rektanglet i øverste højre hjørne er dermed ligedannet med A4.

Litteratur

Nick Lord: *Using A4-sized paper to illustrate that $\sqrt{2}$ is irrational*, The Mathematical Gazette, 2017, s. 142.