Modellering af kortdistanceløb – et supplement

Leif Thy, lektor emeritus, Vejle

Dette indlæg skal ses i forlængelse af en artikel i LMFKbladet nr.2, maj 2018 af Kasper Bjering Søby Jensen (KBSJ) om modellering af kortdistanceløb. Emnet var blevet brugt i forbindelse med en SRP i matematik og idræt. Til modelleringen benyttes en hastighedsfunktion på formen

$$v(t) = a\cdot\left(1-\mathrm{e}^{-k\cdot t}\right) + f\cdot\left(1-\mathrm{e}^{l\cdot t}\right) \qquad (1)$$

hvor

$$v_1(t) = a\cdot\left(1-\mathrm{e}^{-k\cdot t}\right) \qquad (2)$$

er accelerationsbidraget i bevægelsen,

$$v_2(t) = f\cdot\left(1-\mathrm{e}^{l\cdot t}\right) \qquad (3)$$

er et træthedsbidrag, og a, k, f og l er positive parametre, der skal bestemmes ud fra et konkret datasæt for et kortdistanceløb. Mht. $v_1(t)$ henviser KBSJ til Lars Bo Kristensen: *Matidræt*, Systime 2013, s.184, hvor accelerationsbidraget indføres "uden yderligere argumenter", og mht. $v_2(t)$ henvises til en artikel af Kevin Prendergast: *A Mathematical Model of the 100 m and what it means, New Studies in Athletics*, 3/2001. SRP–eleven når i arbejdet med opgaven "ved hjælp af fitning med skydere i Nspire" frem til følgende forskrift for hastighedsfunktionen:

$$v(t) = 12\cdot\left(1-\mathrm{e}^{-0,753\cdot t}\right) + 0,02\cdot\left(1-\mathrm{e}^{0,365\cdot t}\right) \qquad (4)$$

Jeg er ganske enig i KBSJs didaktiske overvejelser vedrørende eksemplets relevans for matematikundervisningen i gymnasiet samt koblingen til idræt og fysik, men jeg stiller mig lidt mere tvivlende overfor bemærkningen om, at eksemplet med sit fokus på eksponentialfunktioner "i stedet for en eller anden fortænkt polynomielt beskrevet hastighedsfunktion, fremstår …. mere forståeligt". Jeg skal med det samme sige, at jeg ikke har læst Prendergasts artikel, og svaret på spørgsmålet om valget af eksponentialfunktioner kan måske findes her.

Et andet spørgsmål, som jeg synes trænger sig på, er følgende: Hvis man skal bestemme de fire parametre i (1) ved "fitning med skydere", så kunne det være rart at have et godt dvs. kvalificeret gæt på, hvilken startværdi man med fordel kan bruge i de enkelte skydere.

Resten af nærværende indlæg skal ses som et forsøg på at "besvare" de ovenfor rejste spørgsmål.

Eksponentialfunktionerne

Vi starter med accelerationsbidraget (2). Her fører en lille omskrivning til ligningen

$$a - v_1(t) = a\cdot\mathrm{e}^{-k\cdot t} \qquad (5)$$

dvs. hvis vi ser bort fra træthedsbidraget i starten af bevægelsen, får vi dels, at a kan tolkes som øvre grænse for momentanhastigheden og dels, at forskellen mellem øvre grænse og selve momentanhastigheden er en aftagende eksponentialfunktion. Hvis derfor accelerationsfasen kan tolkes som en bevægelse, hvor forskellen mellem øvre grænse og momentanhastigheden aftager med en fast procent pr. tidsenhed, så har vi forklaringen på eksponentialfunktionen i accelerationsbidraget. Vi vender tilbage til dette spørgsmål senere, når vi ser på et konkret eksempel.

I næste skridt vil vi se nærmere på træthedsbidraget. Her vil vi lave et par tilnærmelser. Hvis vi tager udgangspunkt i den samlede model for hastighedsfunktionen (1), vil eksponentialleddet i parentesen i accelerationsbidraget være lille i forhold til 1, og eksponentialleddet i parentesen i træthedsbidraget vil være stort i forhold til 1 (prøv fx at indsætte $t = 8$ i eksponentialfunktionerne i (4)). Vi tillader os derfor at se bort fra de små led og tilnærme modellen med følgende udtryk:

$$v_{\text{tiln}}(t) = a - f\cdot\mathrm{e}^{l\cdot t} \Leftrightarrow a - v_{\text{tiln}}(t) = f\cdot\mathrm{e}^{l\cdot t} \qquad (6)$$

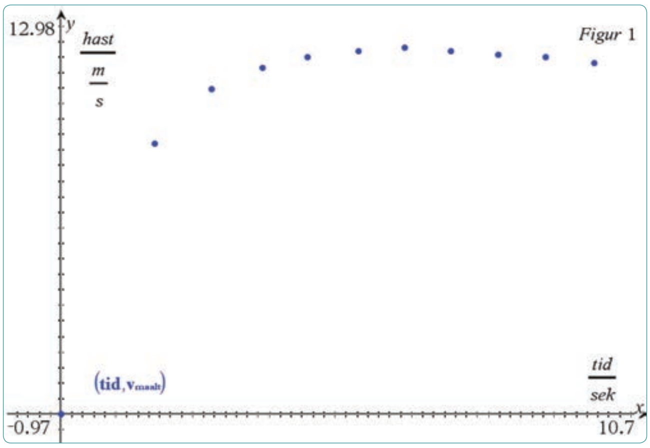
Igen ser vi, at forskellen mellem øvre grænse for hastighedsfunktionen og momentanhastigheden med tilnærmelse er en eksponentialfunktion, denne gang voksende og indeholdende parametrene f og l i træthedsbidraget. Om dette resultat så kan tolkes sådan, at hastigheden i bevægelsen aftager på en sådan måde, at hastighedsforskellen $a - v_{\text{tiln}}(t)$ vokser med en fast procent pr. tidsenhed (ophobning af mælkesyre i musklerne etc.) skal der formentlig en idrætsfysiologisk indsigt til at afgøre. Prendergast kan måske komme os til undsætning. Men vi kan prøve at teste de foregående resultater på et konkret eksempel fx SRP–elevens valg, nemlig:

Maurice Greens 100 m løb ved VM i 1997

I dette løb blev der målt sammenhørende værdier af tid i sekunder og hastigheder i m/s for hver 10. meter under løbet. Måleresultaterne fremgår af følgende skema og kan findes på jmureika.lmu.build/track/splits :

distance [m]	tid [s]	hastighed [m/s]
0	0	0
10	1,71	8,71
20	2,75	10,47
30	3,67	11,14
40	4,50	11,50
50	5,42	11,67
60	6,27	11,80
70	7,12	11,68
80	7,98	11,57
90	8,85	11,51
100	9,73	11,30

Fysik



På figur 1 er vist et punktplot over sammenhørende værdier af tid og hastighed. Ser vi på måleresultaterne, vil det ikke være urimeligt at gætte på a = 12 som øvre grænse for hastigheden.

For at teste antagelserne om, at $a - v(t) = y(t)$ aftager eksponentielt med tiden for accelerationsbidraget og vokser eksponentielt med tiden for træthedsbidraget laves der eksponentiel regression på hhv. de fire første og de fire sidste sammenhørende værdier af tid og $y(t)$. Resultaterne ses i Ramme 1 og Ramme 2 nedenfor.

Vi ser, at der for accelerationsbidragets vedkommende er fin overensstemmelse mellem hastighedsforskellen $a - v(t)$ og en eksponentiel model med en forklaringsgrad på 0,9986, selvom der godt kunne ønskes et bedre sammenfald mellem øvre grænse for hastigheden for den samlede bevægelse (gæt: a =12) og den i regressionsresultatet opnåede værdi a = 11,68.

For træthedsbidragets vedkommende er der knap så god overensstemmelse mellem hastighedsforskellen $a - v(t)$ og den eksponentielle model, men dog acceptabelt med en forklaringsgrad på 0,9734.

Ramme 1. Accelerationsbidrag

```
tid1:={0,1.71,2.75,3.67} ▸ {0,1.71,2.75,3.67}
hast1:={0,8.71,10.47,11.14} ▸ {0,8.71,10.47,11.14}
a_:=12 ▸ 12
y1:=a_−hast1 ▸ {12,3.29,1.53,0.86}
ExpReg tid1,y1,1: CopyVar stat.RegEqn,f1: stat.results
  ▸ [ "Titel"       "Eksponentiel regression"
      "RegEqn"      "a·b^x"
      "a"           11.6821
      "b"           0.485055
      "r²"          0.998554
      "r"           -0.999277
      "Resid"       "{...}"
      "ResidTrans"  "{...}" ]
k:=−ln(stat.b) ▸ 0.723493
```

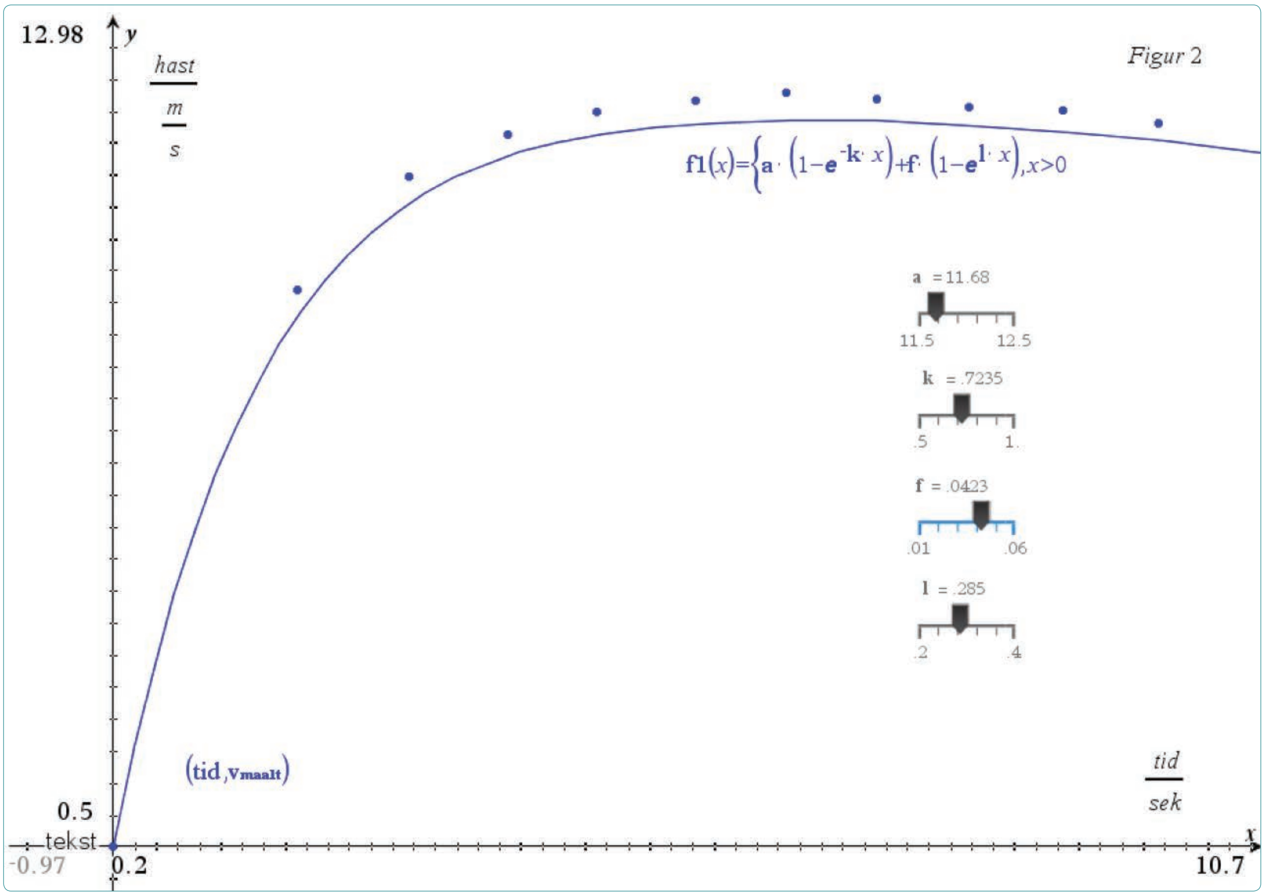
Ramme 2. Træthedsbidrag

```
tid2:={7.12,7.98,8.85,9.73} ▸ {7.12,7.98,8.85,9.73}
hast2:={11.68,11.57,11.51,11.3} ▸ {11.68,11.57,11.51,11.3}
a_:=12 ▸ 12
y2:=a_−hast2 ▸ {0.32,0.43,0.49,0.7}
ExpReg tid2,y2,1: CopyVar stat.RegEqn,f2: stat.results
  ▸ [ "Titel"       "Eksponentiel regression"
      "RegEqn"      "a·b^x"
      "a"           0.042295
      "b"           1.32977
      "r²"          0.97337
      "r"           0.986595
      "Resid"       "{...}"
      "ResidTrans"  "{...}" ]
l:=ln(stat.b) ▸ 0.285004
```

Ramme 3. Residualkvadratsum

```
tid:={0,1.71,2.75,3.67,4.5,5.42,6.27,7.12,7.98,8.85,9.73} ▸ {0,1.71,2.75,3.67,4.5,5.42,6.27,7.12,7.98,8.85,9.73}
vmaalt:={0,8.71,10.47,11.14,11.5,11.67,11.8,11.68,11.57,11.51,11.3} ▸ {0,8.71,10.47,11.14,11.5,11.67,11.8,11.68,11.57,11.51,11.3}
vmodel(t):=a·(1−e^(−k·t))+f·(1−e^(l·t)) ▸ Udført
vmodliste:=vmodel(tid) ▸ {0.,8.69251,10.4648,11.1924,11.5126,11.6707,11.7122,11.6899,11.6167,11.4922,11.306}
res:=vmodel(tid)−vmaalt ▸ {0.,-0.017495,-0.005157,0.052396,0.012626,0.000689,-0.087842,0.009879,0.046716,-0.01782,0.006045}
Σ(res²)=sum(res²) ▸ 0.013588
```


Fysik

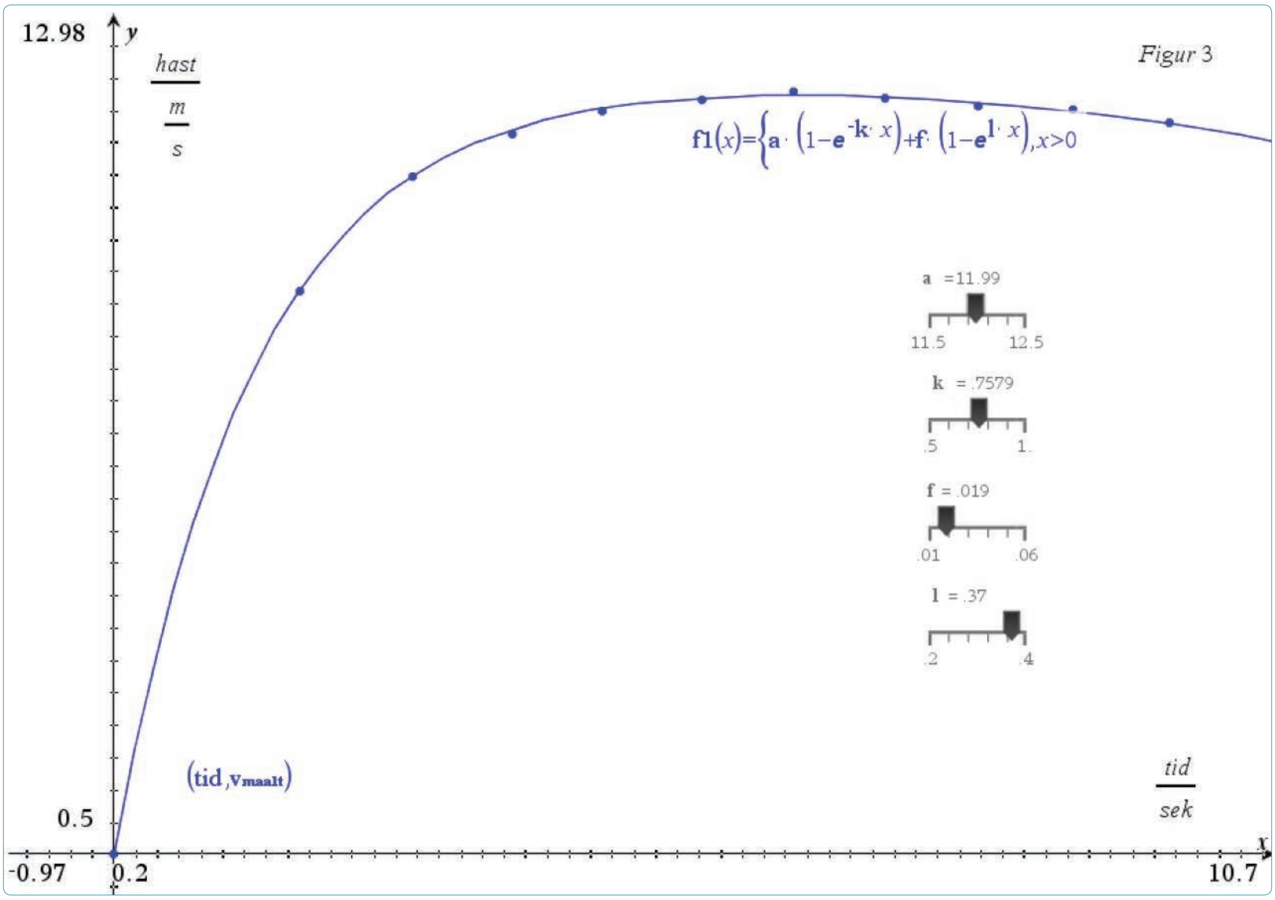


Desværre kan Nspire – mig bekendt – ikke lave regression med selvvalgte funktioner, så derfor vil vi i det følgende tillade os at bruge de opnåede værdier for parametrene *a*, *k*, *f* og *l* i de to regressionsresultater ($a = 11{,}68$; $k = 0{,}7235$; $f = 0{,}0423$ og $l = 0{,}2850$) som udgangspunkt for fitning med skydere i Nspire. For at få en ide om, hvornår fitningen er "god nok", vil vi ud over at lave en grafisk vurdering af hvor god overensstemmelse, der er mellem datapunkter og modelfunktion, også beregne summen af residualkvadraterne for modelfunktionen. Som bekendt skal denne være så lille som mulig, se Ramme 3.

På figur 2 er vist resultatet af fitningen med ovennævnte valg af parametre og en residualkvadratsum på 1,403. Vi ser, at databehandlingen af accelerationsbidraget og træthedsbidraget giver et rimelig godt udgangspunkt for det videre arbejde.

Vi skal nu til at justere på skyderne. Her kan det godt betale sig at overveje, hvilken rækkefølge man vil gøre det i. Umiddelbart vil jeg mene, at accelerationsbidraget er vigtigere end træthedsbidraget, og at øvre grænse for hastigheden er vigtigere end den procentiske ændring i forskellen mellem øvre grænse og momentanhastigheden, dvs. *a* kommer før *k*. Parametrene i træthedsbidraget er lidt sværere at vurdere. Parameteren *f* har vi ingen fortolkning af, og om forståelsen af *l* er korrekt, er uklart, så her må vi prøve os lidt frem, samtidig med at vi vurderer punkternes beliggenhed i forhold til grafen. Vi regulerer

	start	1. skridt	2.	3.	4.	5.	6.	SRP
a	11,68	12,08					11,99	12
k	0,7235		0,7235		0,7465		0,7579	0,753
f	0,0423		0,0463	0,0513		0,0507	0,019	0,02
l	0,285						0,37	0,365
$\sum res^2$	1,403	0,0744	0,0542	0,05253	0,01581	0,015625	0,013588	0,014488



derfor parametrene i den rækkefølge, der er antydet i figur 2. I første omgang kan vi lade Nspire vælge steplængden automatisk. Til sidst kan vi selv vælge steplængden, så usikkerheden på parametrene fx ligger på 3. eller 4. ciffer. Skemaet på forrige side viser resultaterne af forsøgene (tomme felter angiver uændrede værdier i forhold til forrige skridt). Slutresultatet i 6. skridt er opnået efter lidt "fri leg", og kan ses grafisk i figur 3. Til sammenligning er den tidligere omtalte SRP–elevs resultater vist i den sidste kolonne.

Lad os prøve at se, hvor godt modellen reproducerer resultatet fra Maurice Greens 100 m finale ved VM i Athen 1997, som han vandt i tiden 9,73 sek. Den tilbagelagte strækning kan beregnes som

$$\int_0^{9,73} v(t)\,\mathrm{d}t = 99,21\ \mathrm{m} \qquad (7)$$

Går vi baglæns og løser ligningen

$$\int_0^{t} v(t)\,\mathrm{d}t = 100 \qquad (8)$$

giver det løsningen t = 9,80 s. Set fra et modelleringssynspunkt må disse resultater siges at være OK, selvom Maurice Green nok ikke ville være tilfreds med at blive noteret for sluttiden 9,80 s.

Afslutningsvis vil jeg vurdere casen som et interessant og udfordrende eksempel på modellering, som ligger noget ud over, hvad elever i gymnasiet som standard præsenteres for. Endvidere udgør casen et godt udgangspunkt for en diskussion af modellers rækkevidde, fx hvis man forsøger at strække modellen til tider, der er bare en lille smule større end sluttiderne på en 100 meter (se fx KBSJ's artikel i LMFKbladet, 2/2018).

Litteratur

Kristensen, Lars Bo: *Matidræt*, Systime, 2013

Jensen, Kasper Bjering Søby: *Modellering af kortdistanceløb*, LMFKbladet 2/2018

Prendergast, Kevin: *A Mathematical Model of the 100 m and what it means, New Studies i Athletics*, 3/2001

Historiske data på: jmureika.lmu.build/track/splits