Ellipsen – en egenskab

Jens Carstensen, Frederiksberg & Alija Muminagić, Frederiksberg

Den almindelige ellipse har et væld af egenskaber, og vi skal her se på en af dem, der ikke er så kendt.

Det er velkendt, at ellipsenormalen i et punkt på ellipsen er vinkelhalveringslinje for vinklen mellem brændstrålerne til punktet. Desuden har ellipsen med ligningen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

parameteren $p=\frac{b^2}{a}$. Den angiver længden af den halve ellipsekorde gennem et brændpunkt vinkelret på storaksen. Dette fås ved at indsætte $x = ae$ i ellipsens ligning og bestemme y.

Vi viser nu følgende måske overraskende sætning:

Sætning. Længden x af projektionen af ellipsenormalen n på brændstrålen PF_2 er lig med parameteren p.

Bevis. Lad P have koordinaterne (x_1, y_1) og lad normalen i P skære x–aksen i R. Projektionen af R på PF_2 er S og vi sætter $x = PS$.

Brændstrålerne f_1 og f_2 har længderne

$$f_1 = PF_1 = a + ex_1 \quad \text{og} \quad f_2 = PF_2 = a - ex_1$$

Da PR er vinkelhalveringslinje for vinklen P i ΔF_1PF_2 er

$$\frac{F_1R}{F_2R}=\frac{f_1}{f_2} \quad \text{og} \quad F_1R + F_2R = 2ae$$

Heraf fås

$$F_1R = ef_1 \quad \text{og} \quad F_2R = ef_2$$

Vi sætter $v = \angle F_1PF_2$ og får i ΔPRS, at

$$\cos\frac{v}{2}=\frac{x}{n}$$

og cosinusrelationerne i ΔF_1PF_2 giver

$$\cos v = \frac{f_1^2+f_2^2-(2ae)^2}{2f_1f_2}$$

Vi får af formlerne for brændstrålernes længder ovenfor, at

$$f_1^2 + f_2^2 = 2a^2 + 2e^2x_1^2 \quad \text{og} \quad f_1f_2 = a^2 - e^2x_1^2$$

Dermed er

$$\cos v = \frac{2a^2+2e^2x_1^2-4a^2e^2}{2f_1f_2}=\frac{a^2+e^2x_1^2-2a^2e^2}{f_1f_2}$$

Vi benytter, at

$$\cos^2\frac{v}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos v)$$

og får

$$\frac{x^2}{n^2}=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{a^2+e^2x_1^2-2a^2e^2}{f_1f_2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{n^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2a^2(1-e^2)}{f_1f_2}=\frac{b^2}{f_1f_2} \qquad (1)$$

Efter formlen for en vinkelhalveringslinjes længde i ΔF_1PF_2 er

$$n=\frac{2f_1f_2\cdot\cos\frac{v}{2}}{f_1+f_2}=\frac{2f_1f_2\cdot\frac{x}{n}}{2a}=\frac{f_1f_2x}{an}$$

hvoraf

$$n^2=\frac{f_1f_2x}{a} \qquad (2)$$

Af (1) og (2) fås så

$$\frac{x^2a}{f_1f_2x}=\frac{b^2}{f_1f_2} \Leftrightarrow x=\frac{b^2}{a}=p$$