Matematikkens metoder

illustreret med eksempler fra ligningernes historie

Jessica Carter, Institut for Matematik og Datalogi, SDU

Indledning

I gymnasiets studieretningsprojekt (SRP) skal eleverne blandt andet inddrage videnskabsteoretiske elementer og behandle problemstillinger ved hjælp af metoder fra de indgående fag (UVM 2018). Matematikkens metode karakteriseres oftest som den 'aksiomatisk–deduktive metode', eller ved at man benytter 'matematisk ræsonnement og bevisførelse'.

I denne artikel vil jeg gå lidt dybere ned i beskrivelsen af matematikkens metoder. Hensigten er at illustrere, at matematikkens metode indeholder mere end blot at bevise (eller anvende) resultater. Der er en masse arbejde, der går forud for, at et resultat kan bevises stringent; et arbejde der handler om at nå frem til de matematiske sammenhænge. Jeg tager udgangspunkt i et konkret eksempel, andengradsligningen, som ligger inden for gymnasiets pensum. Jeg vil benytte matematikkens historie til at illustrere nogle af de begivenheder, som har ført til vores moderne formulering af 2. gradsligningen og den generelle løsningsformel, vi har i dag.

Jeg dykker især ned tre steder: I den Græske matematik (ca. 300 f.v.t.), i Islamisk matematik (ca. 800 e.Kr.) og Europa efter 1400–tallet [1]. Det er ikke min hensigt, at denne artikel giver et fuldstændigt, eller nødvendigvis helt retvisende, billede af ligningernes historie. Det er ikke muligt på så kort en plads. Jeg vil især henvise til *Kilder og kommentarer til ligningernes historie* (Andersen, 1986) og (Katz, 2009) for en grundig og lødig gennemgang af ligningernes historie. Intensionen med de valgte eksempler er at underbygge fem nedenstående pointer, som vil blive belyst undervejs i artiklen.

1. Udviklingen i matematik går ofte fra løsning af **enkeltstående problemer** til formulering af en **generel teori** som indeholder disse problemer.
2. **Systematik:** Bevidsthed om at der er problemer, der ligner hinanden, og at der kan findes en systematisk måde at løse samtlige af disse problemer.
3. **Generalisering:** At man indser, at forskellige problemer kan behandles under ét.
4. **Abstraktion:** Fra at et problem handler om noget bestemt, fx geometriske figurer, til at formuleringen af det kan benyttes på flere forskellige ting.
5. **Notation.** En velvalgt notation er forudsætningen for at kunne se, at der er et problem af en bestemt type.

Matematikkens metode

Det er ikke simpelt at give en kort og rammende beskrivelse af, hvad matematik handler om. Ét bud er, at matematik forsøger at formulere nødvendige sammenhænge om abstrakte ting. Disse sammenhænge ønsker man formuleret så generelt som muligt. Sammenhængene præsenteres som sætninger, og disse skal bevises ud fra givne forudsætninger eller aksiomer. Desuden er matematik kendetegnet ved, at der gives præcise beskrivelser af de begreber, der benyttes; formuleret ved såkaldte definitioner. En standard måde at beskrive matematik på er, at begreber defineres, sætninger formuleres og bevises. Men hvordan kommer man frem til disse sætninger? Det er det, denne artikel handler om. Jeg vil lave tre udvalgte nedslag i historien for at illustrere, hvordan formuleringen og løsningen af 2. gradsligningen har udviklet sig. I dag er en 2. gradsligning en ligning på formen

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

hvor a, b og c er reelle tal og $a \neq 0$. Løsningerne er givet ved

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Hvis $b^2 - 4ac$ er negativ siges der ikke at være nogen reelle løsninger. Hvis man udvider domænet, vil der i stedet være komplekse løsninger. De komplekse tal dukker op i forbindelse med løsninger af 3. gradsligninger i det 16. århundrede – men det er en anden historie! Vi ser i det følgende på, hvordan man er kommet frem til den generelle form af 2. gradsligningen.

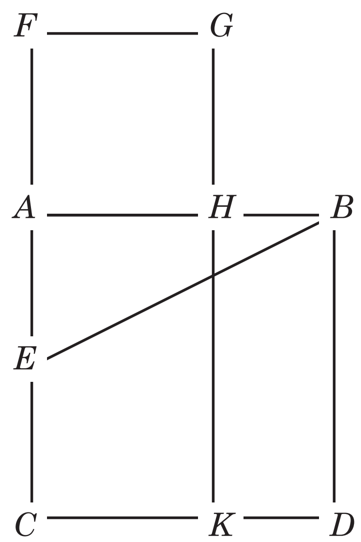
Uddrag fra 2. gradsligningernes historie

2. gradsligninger i Græsk matematik

Et af det mest bemærkelsesværdige værker i Græsk matematik er *Euklids Elementer*, som man mener er skrevet omkring 300 f.v.t. Heri kan man finde problemer, som kan oversættes til 2. gradsligninger. Et af disse er Sætning 11 i bog II, Euklid II.11. Problemet lyder sådan her i Tyra Eibes danske oversættelse (Euklid, 1976):

At dele et givet linjestykke i to dele således, at kvadratet på det ene stykke er lig rektanglet dannet af det andet stykke og hele linjen.

Diagrammet, som ledsager løsningen, er her:



Figur 1
Diagram tilhørende sætning II.11 i Euklids Elementer. Linjestykket AB skal deles, således at kvadratet på AH er lig rektanglet dannet af siderne HB og BD.

Med figurens betegnelser går problemet altså ud på at dele linjestykket AB i to dele, således at kvadratet på den ene del, *AH*, er lig rektanglet udspændt af *HB* og *BD*. Hvis vi benytter moderne notation, kan vi oversætte det til en ligning. Hvis vi sætter det givne linjestykke *AB* lig *b* og *AH*, det linjestykke der skal bestemmes, til *x*, bliver det til en andengradsligning:

$$x^2 = (b - x) \cdot b$$

Eller hvis vi ganger parentesen ud og rykker alle led over på venstre side:

$$x^2 + bx - b^2 = 0$$

Euklids måde at løse dette problem foregår ved at lave en konstruktion, som indikeret af diagrammet: Givet linjestykket *AB*, konstruér først kvadratet *ABCD*. Del linjestykket *AC* i to lige store stykker ved *E*. Forbind punktet *E* med punktet *B*. Forlæng linjestykket CA således at stykket *EF* er lig *EB*. Konstruér et kvadrat på *AF*. Det rammer det givne linjestykke *AB* i punktet *H*. Forlæng endeligt linjestykket *GH* så det møder linjestykket *CD*. Det søgte punkt er *H*. Efter denne konstruktion demonstrerer Euklid at punktet *H* har de ønskede egenskaber, nemlig at kvadratet på *AH* er lig det dannede rektangel *HB*,*BD*. Jeg springer dette argument over, men kan oplyse at det bland andet benytter Euklids version af Pythagoras' sætning på den retvinklede trekant *ABE* [2].

Jeg vil rette opmærksomheden på, at der her ikke er noget '*x*', dvs. notation for den ubekendte. Der er heller ikke noget 'i anden', som indikerer, at der her er tale om løsning af et problem, der svarer til en 2. gradsligning. Problemet handler udelukkende om delingen af et linjestykke udtrykt i termer af kvadrater og rektangler. Den ubekendte i denne formulering af problemet er et linjestykke. Løsningen af problemet foregår ikke ved algebraiske manipulationer, fx ved at lægge tal til eller trække dem fra hinanden på begge sider af et lighedstegn. Løsningen findes ved hjælp af geometriske konstruktioner, som kan udføres ved hjælp af passer og lineal.

Bemærk også, at denne konstruktion kun løser denne specifikke ligning med de givne koefficienter. Hvis vi ville løse et problem svarende til en 2. gradsligning med andre koefficienter, vil det kræve en helt ny konstruktion, eller med andre ord, metode. Man ser således i den Græske geometri, at der formuleres og løses enkeltstående problemer, som kan oversættes til 2. gradsligninger.

2. gradsligninger i den Islamiske matematik – 800 år e.Kr.

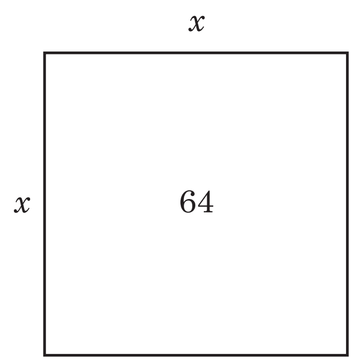
Omkring 800 år e.Kr. finder arabiske matematikere en systematisk måde at løse alle 2. gradsligninger. Da matematikbøgerne indeholder referencer til Allah (man takker fx for den indsigt man har fået), betegnes matematikken fra denne periode oftest *Islamisk matematik*.

Problemerne bliver stadig formuleret via geometriske betegnelser som 'kvadrat' [3]. De handler om at bestemme 'roden', dvs. siden i dette kvadrat. 2. gradsligningen, som vi skriver den, findes således heller ikke her, men problemerne kan nemt oversættes til 2. gradsligninger. Da de repræsenteres som geometriske figurer er der heller ikke negative tal med i billedet; det giver ikke mening f.eks. at tale om et linjestykke med negativ længde eller et negativt areal. Derfor er der her tale om et antal forskellige problemer af samme type – i alt 6 forskellige. De løsninger, vi ser på, er formuleret af *Al–Khwarizmi* (ca. 780–850), som formentlig stammede fra byen af samme navn, Khwarizmi.

I titlen på bogen, som løsningerne præsenteres i, indgår ordet *al–jabr*. Ved senere oversættelser blev dette ord ikke oversat, og det er så med tiden blevet til 'algebra' som en betegnelse for det område, hvor man løser ligninger. Typerne, som Al–Khwarizmi ser på, er gengivet her tilsammen med en oversættelse af problemet til en ligning:

'Kvadrat lig et tal', $x^2 = c$.
'Kvadrat og rødder lig et tal', $x^2 + bx = c$.
'Kvadrat og tal lig rødder', $x^2 + c = bx$.
'Kvadrat lig rødder og tal', $x^2 = bx + c$.
'Kvadrat lig rødder', $x^2 = bx$.

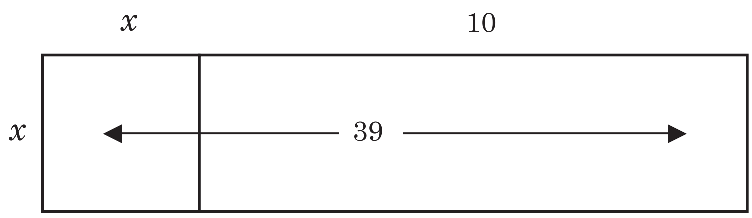
Al–Khawrizmi løser også problemet 'rødder lig et tal', som vi kunne skrive som $bx = c$. Jeg viser her hvordan de første to løses af Al–Khwarizmi. Problemerne formuleres ikke generelt, men med givne talstørrelser for antallet af rødder og tallet. Lad os se på problemet 'Kvadrat er lig 64'. Figuren hørende til dette problem er givet nedenfor, figur 2. Bemærk at betegnelserne '*x*' for siden i kvadratet og '64' for arealet er tilføjet af mig for at gøre det lettere for læseren – betegnelsen *x* forekommer ikke i den Islamiske matematik!



Figur 2
Illustration af 'kvadrat er lig et tal'.

Problemet siger, at arealet af et kvadrat er 64, og siden i dette kvadrat skal bestemmes. Det gør vi ved at tage roden, som er 8. Det søgte linjestykke er derfor 8.

Det næste problem er af typen 'kvadrat og rødder er lig et tal'. Vi ser mere specifikt på 'kvadrat og 10 af dets rødder er 39'. Problemet og løsningen illustreres i figur 3 til 5. Igen er '*x*' og talsymbolerne tilføjet af mig.

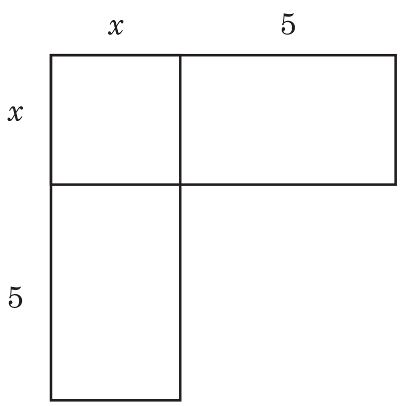


Figur 3
Arealet af kvadratet til sammen med rektanglet med siderne x og 10 er lig 39.

Figur 3 viser problemet, som vi ville skrive som $x^2 + 10x = 39$. Det viser et kvadrat, som er sammensat med et rektangel med areal 10 gange x med samlet areal 39. Al–Khwarizmi formulerer først en algoritme eller procedure, der kan anvendes til at løse problemet:

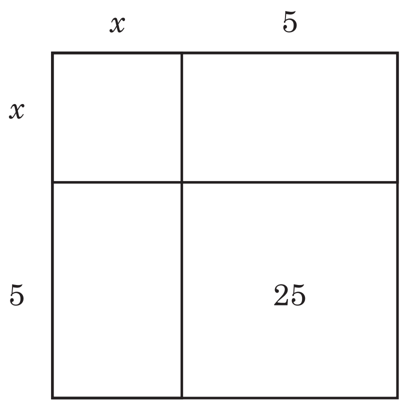
1. Tag de halve antal af rødder, dvs. $10/2 = 5$.
2. Gang disse med sig selv, $5 \cdot 5 = 25$.
3. Læg dette til tallet, dvs. $25 + 39 = 64$.
4. Tag roden, dvs. 8.
5. Træk de halve antal rødder fra, $8 - 5 = 3$.
6. Løsningen er 3.

Al–Khwarizmi giver derefter en geometrisk begrundelse for denne løsning, illustreret ved figur 3–5:



Figur 4
Første trin i løsning af 'Kvadrat og 10 af dens rødder er 39'. Rektanglet er delt i to lige store dele og flyttet under kvadratet.

I figur 4 er halvdelen af rektanglet "brækket af" og placeret neden under kvadratet. Arealet af figuren er stadig 39. I figur 5 "fyldes kvadratet ud"; vi tilføjer et kvadrat med sidelængde 5. Arealet bliver således $39 + 5 \cdot 5 = 64$. Siden i dette kvadrat er 8, og da siden er sammensat af 5 og roden, (dvs. er lig $5 + x$), må roden være lig 3.



Figur 5
Kvadratet fyldes ud. Da arealet nu er 39 + 25 = 64 ses roden, siden i kvadratet, at være 3.

Al–Khwarizmi løser alle de andre typer af problemer på tilsvarende vis; der formuleres først en algoritme, som man kan følge for at finde frem til roden, og derefter gives en geometrisk demonstration. Man kan derfor sige, at vi i den Islamiske matematik har en *systematisk* løsning af samtlige typer af andengradsligninger. Der er dog stadig ikke noget 'i anden' i deres notation. (Faktisk er der ingen notation udover de benyttede talsymboler.) Formuleringen af problemerne er knyttet til de geometriske figurer, som vi så i demonstrationerne af løsningerne, nemlig kvadrater og rektangler og deres areal. Ved at repræsentere problemerne på denne måde, gøres det muligt at overskue samtlige muligheder for hvordan kvadrater, rektangler og tal kan sammensættes – og derved få den systematiske opstilling og løsning af disse problemer. Bemærk også, at den givne algoritme nemt kan oversættes til en formel, hvis man introducerer passende notation for den ubekendte, koefficienter og regneoperationer. Man kan derfor sige, at 2. gradsligningen og dens løsning idemæssigt er på plads i den Islamiske matematik. Men der mangler notation; fx en måde at skrive ligningen på som berettiger navnet '2. gradsligning'.

Mod 2. gradsligningen – Europa fra 1400 og frem

Vi springer nu lidt frem i tiden og peger på enkelte faktorer, som var medvirkende til formuleringen af den generelle 2. gradsligning. Jeg vil især bemærke tre ting. Den første handler om indførelse af *notation* for operationer som addition, roduddragning og for den ubekendte. For det andet er overgangen fra at beskrive løsningen ved en procedure til at opskrive en *formel*. Som det tredje element har vi Descartes' indførelse af notation for den algebraiske operation *'i anden'* og hans betegnelse for den ubekendte. Udover den nævnte bog om ligningernes historie kan jeg anbefale (Cajori, 1952) om indførelse af matematisk notation og (Gericke, 1994) om tallenes historie, som yderligere læsning.

I Italien og Frankrig fra omkring 1400 ser man begyndelsen på indførelse af notation for forskellige operationer. Notationen bliver dog ikke brugt konsistent. I den Italienske matematik indføres notation for plus og minus, fx $\overline{p}$ og $\overline{m}$ af de såkaldte 'abacists' eller regne–hjælpere. Disse udvikler regnemetoder til at hjælpe handelsmænd at holde styr på deres regnskaber.

I starten betegnes den ubekendte for *cosa*, som er Italiensk for 'ting'. Kvadratet og 'i tredje' betegnes henholdsvis *censo* og *cubo*. Disse forkortes efterhånden til *c*, *ce* og *cu*, så kan man fx skrive *censo* *di censo* eller *ce ce* som en kort måde at skrive $x^2 x^2$ eller x^4 eller *ce cu* for $x^2 x^3$. (Men tænk over hvor vanskelige potensregneregler bliver med denne notation!)

Noget notation benyttes endvidere af Cardano, da han i 1545 udgiver sin *Ars Magna* med en fuldstændig og systematisk løsning af 3. og 4. gradsligninger. 3. gradsligningerne er her dog stadig knyttet til geometriske figurer i tre dimensioner, terninger og kasser: opgaven går ud på at bestemme siden i en terning. Selvom der her i stigende grad benyttes notation både for en ubekendt og algebraiske operationer, er der ikke nogen generelle *formler*. Når løsningerne skrives ned, er det stadig i form af procedurer, der skal følges for at komme frem til resultatet eller som regneoperationer på konkrete tal, se fx (Andersen 1986, s. 174).

Den person, der tilskrives æren for at man begynder at opstiller generelle formler, er Franskmanden Viète (1540–1603). Udover at benytte notation for operationer finder Viète på, at vi kan navngive både kendte og ubekendte størrelser med store bogstaver. Vokaler som *A*, *E* benyttes om ubekendte, og konsonanter, som fx *B*, *C* betegner kendte størrelser. Han benytter de velkendte tegn '+', '–' og '$\frac{A}{B}$'. Multiplikation skriver han som 'in', og 'quad' benyttes for 'kvadratet på'. '*l*' (for latus) benyttes oftest for kvadratroden og han skriver 'er lig' (aequetus) i stedet for et lighedstegn. Når han formulerer ligninger, går han op i at dimensionen skal være den samme på begge sider og benytter derfor 'plan' for at angive, at et tal betegner et areal. Med denne notation kan en af vores 2. gradsligninger formuleres som

$$A\ quad + B2\ in\ A\ er\ lig\ Z\ \ plan$$

I vores notation kan denne ligning skrives $A^2 + B \cdot 2 \cdot A = Z$ med *A* som den ubekendte.

Løsningen angives ved:

$$A\ er\ lig\ l\ \ \overline{Z\ \ plan + B\ quad} - B$$

I ovenstående løsning angiver stregen over udtrykket en parentes, således at kvadratroden skal tages af $\overline{Z\ \ plan + B\ quad}$, dvs. $A = \sqrt{Z + B^2} - B$. Bemærk, at Viète nogle gange benytter et lille '*r*', √, som står for *radix*, som betegnelse for kvadratroden.

Sidste nedslag i denne artikel er i Descartes' **La Geometrie**. I denne introducerer Descartes (1596–1650) det, som vi i dag kalder 'den analytiske geometri'. Han beskriver, hvorledes man kan oversætte geometriske problemer til algebraiske ved blandt andet at navngive linjestykker med et lille bogstav, fx '*a*'. (Han introducerer desuden koordinatsystemet, men det er ikke så relevant i denne kontekst.) Husk på, at linjestykkerne i den Euklidiske geometri blev betegnet ved hjælp af deres endepunkter, fx som '*AB*'. Descartes finder desuden, at det er smart at skrive a^2 i stedet for $a{\cdot}a$, a^3 i stedet for $a{\cdot}a{\cdot}a$ osv. Han introducerer konventionen at betegne de ubekendte (linjestykker) ved de sidste bogstaver i alfabetet, fx ved *x*, *y* eller *z*, og kendte størrelser med de første, dvs. *a*, *b*, *c*, osv. Han viser således, hvordan man effektivt kan løse geometriske problemer ved at lave algebraiske manipulationer af en algebraisk oversættelse af dem. Med disse redskaber er det nu muligt at formulere 2. gradsligningen algebraisk, som fx $ax^2 + bx = c$ og opskrive løsningen som

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2}$$

(Descartes benytter som Viète et stiliseret '*r*' for roden og en streg over et udtryk for at markere en parentes.) Descartes adresserer desuden, at der generelt må være to løsninger til 2. gradsligninger (og 3 løsninger til en 3. gradsligning, osv.), hvilket i dag betegnes som Algebraens Fundamentalsætning. Han kommenterer om disse løsninger, at de kan være positive, hvilket han betegner som 'sande' løsninger og 'falske', dvs. negative løsninger. Den sidste mulighed er, at de er 'imaginære', eller komplekse løsninger.

Med ovennævnte notation er det nu muligt at karakterisere problemerne som *ligninger*, der indeholder den ubekendte *i anden* og derved betegnelsen 2. gradsligning. Vi kan således generalisere denne type problem til at omhandle ligninger af forskellig grad – afhængig af hvilken potens den ubekendte er i. Herved opstår et helt område: studiet af ligninger af forskellig grad [4]. Bemærk også, at det problem, som hos Euklid og i den Islamiske matematik var knyttet til geometriske størrelser og figurer, nu ikke handler om noget specifikt – problemet er blevet *abstrakt*. I den algebraiske formulering kan det handle om hvad som helst, inklusive geometriske figurer.

Vi er stadig ikke nået frem til den helt generelle opstilling af 2.gradsligningen, som jeg skrev i starten af artiklen. Det tog åbenbart lang tid, inden man fandt det passende altid at opskrive 2. gradsligningen med koefficienter, som kunne antage alle værdier – inklusive negative tal. I sidste afsnit af (Andersen, 1986) har forfatteren fx fundet en dansk lærebog fra 1807 hvor 2. gradsligningen udelukkende præsenteres med positive koefficienter. Gericke (1994) gennemgår mere om de negative tals historie.

Opsummering

Jeg vender nu tilbage til de pointer, som jeg skitserede i introduktionen og som beskriver, hvordan matematikken kan udvikle sig. Igennem eksemplet med udviklingen af løsningen af 2. gradsligningen har jeg bemærket, at der i starten er enkeltstående problemer svarende til 2. gradsligninger, som bliver løst i den Græske matematik. Man ser senere i den Islamiske matematik, at der formuleres en hel klasse af problemer, omhandlende kvadrater og rektangler med henblik på at bestemme siden i kvadratet. Vi ser således en systematisk løsning af samtlige 2. gradsligninger. I dag er løsningen af 2. gradsligningen del af en større teori, som omhandler løsning af (polynomiums–)ligninger generelt. Et centralt resultat i denne teori er den nævnte Algebraens Fundamentalsætning, som siger, at enhver *n*'te gradsligning har *n* løsninger (hvis de tælles med multiplicitet og man arbejder med komplekse tal). Udviklingen går således fra, at man finder og løser enkeltstående problemer til udvikling af en teori, der omhandler disse.

Et andet element i matematikkens metode handler om *systematik*; at man for det første kan indse, at der er tale om en klasse af lignende problemer, og for det andet, finde en systematisk måde at formulere disse problemer på, således at alle problemer tages med. I eksemplet har jeg fremhævet, at formuleringen af ligninger knyttet til kvadrater og rektangler med et givent areal gjorde det muligt at opskrive og løse samtlige typer af 2. gradsligninger.

Generalisering er relateret til det, at der er forskellige beslægtede problemer. Her indses, at man ved at generalisere kan reducere flere lignende problemer til ét enkelt problem, og at man således kun behøver at angive én løsning. Det opnås ved at vi formulerer 2. gradsligningen på den form, vi er vant til. Evnen til at generalisere anses for meget værdifuldt i matematik; det er meget effektivt, hvis man kan løse mange problemer under et!

Jeg bemærkede undervejs, at det som ligningerne handler om, gradvis ændrer sig. I den Græske matematik formuleres problemerne som geometriske problemer. I den Islamiske matematik er demonstrationen af proceduren formuleret ved hjælp af geometriske figurer. I den endelige version af 2. gradsligningen er kun algebraiske symboler. Styrken ved denne er, at symbolerne og den ubekendte ikke står for noget bestemt, men kan stå for hvad som helst. Ligningen er blevet *abstrakt*.

Det sidste fænomen handler om betydningen af at have en passende *repræsentation af* problemet og en velegnet *notation* til at beskrive det. Eksemplet med 2. gradsligningerne skulle illustrere, at repræsentationen og den valgte notation har en betydning for at kunne se, at der er et problem og for at identificere problemets *type*. Vi har set, at der i den Islamiske matematik formuleres problemer, som kan knyttes til kvadrater, rektangler og deres areal. Denne repræsentation af problemerne giver for det første anledning til, at samtlige 2. gradsligninger kan formuleres i forhold til de forskellige måder kvadrater, rektangler og tal kan sammensættes. For det andet klassificeres problemet: til sammen udgør de typen af problem, eller ligning, der handler om kvadrater. (Tilsvarende formuleres ligninger, der knytter sig til terninger.) Efter Descartes' indførelse af notationen a^2 kan disse ligninger betegnes som 2. gradsligninger. Denne betegnelse fører endvidere til, at man generelt kan tale om *n*'te gradsligninger, som ligninger på formen $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$.

Man kan nu stille generelle spørgsmål om denne type af ligning, som fx hvor mange rødder, den har, og hvordan disse kan findes [5]. Jeg bemærkede, at man også kunne formulere ligninger af højere grad med den Italienske "notation", fx som *cubo di cubo* (= x^6). Men denne notation har en del at ønske sammenlignet med notationen efter Descartes. Det er både vanskeligere at vide, hvad udtryk står for og at regne med dem. Jeg kan fx nemt se, at $x^6 \cdot x^5 = x^{11}$, men ikke hvad *cubo di cubo* gange *censu di cubo* er. Så selvom de Italienske matematikere indførte noget notation, som gav anledning til formulering af nye ligninger, har håndteringen af dem været vanskelig.

Noter

[1] Man kunne også kigge på ligningernes historie generelt. Jeg har dog valgt at begrænse mig (med få undtagelser) til 2. gradsligningen, for at det matematiske indhold ligger inden for gymnasiets pensum.

[2] I Euklids version af Pythagoras sætning (Elementerne I.47) henviser et 'kvadrat' en geometrisk figur og ikke en algebraisk størrelse 'a^2'.

[3] Selvom problemformuleringerne indeholder 'kvadrat' og repræsenteres ved geometriske figurer, gives der også eksempler, som ikke kommer fra geometri.

[4] Bemærk, at man på engelsk betegner disse ligninger 'quadratic' og tilsvarende siger 'cubic' equations om 3. gradsligninger. På denne måde hænger den tidligere geometriske fortolkning ved.

[5] Descartes var blandt andet optaget af de klassiske problemer, som blev formuleret i det antikke Grækenland. Et af disse problemer er fordoblingen af terningen; at konstruere siden i en terning, som har dobbelt volumen i forhold til en given terning. Formuleres dette problem algebraisk, giver det anledning til en 3. gradsligning. Descartes argumenterede for – men beviste ikke stringent – at dette er et argument for, at problemet ikke kan løses ved hjælp af passer og lineal. Se (Lützen 2010).

Referencer

Andersen, K. Redaktør (1986). *Kilder og kommentarer til Ligningernes Historie*. Vejle: Forlaget Trip.

Cajori, F. (1952). *A History of Mathematical Notations*. La Salle, Ill.: Open Court Publishing Company.

Euklid. (1994). *Elementer I–IV*. Oversat af Thyra Eibe. Vejle: Forlaget Trip.

Gericke, H. (1994). *Talbegrebets Historie*. Oversat af Kirsti Andersen og Kate Larsen. Matematiklærerforeningen og Institut for de Eksakte Videnskabers Historie, Aarhus Universitet. Oprindelig version udgivet ved Bibliographisches Institut, Mannheim 1970.

Katz, V.J. (2009). *A History of Mathematics. An Introduction*. 3rd Edition. Pearson Education, Inc.

Lützen, J. (2010). *The algebra of geometric impossibility: Descartes and Montucla on the impossibility of the duplication of the cube and the trisection of the angle*. Centaurus, 52(1), 4–37.

UVM (2018). *Studieretningsprojektet–stx–vejledning–2018*, se uvm.dk/gymnasiale-uddannelser/fag-og-laereplaner/laereplaner-2017/stx-laereplaner-2017