En 'vilkårlig' trekant

Jens Carstensen, Frederiksberg

Mange geometriske og trigonometriske sætninger handler om en 'vilkårlig' trekant (højder, medianer, sinusrelationerne, cosinusrelationerne osv.). Undervisere i geometri og forfattere af tekster i plangeometri er derfor interesserede i med en vis nonchalance på tavlen eller papiret at kunne tegne en 'vilkårlig' trekant, dvs. en trekant, der tydeligvis hverken er retvinklet, ligebenet eller ligesidet. Det er ikke nogen let øvelse, prøv selv!

Der er i Tyskland for en del år siden foretaget en undersøgelse af skoleelevers evne til at skelne mellem vinkler af forskellige størrelser. Eleverne fik forelagt to vinkler og skulle så spontant afgøre, om de havde samme gradtal. En tabel så sådan ud:

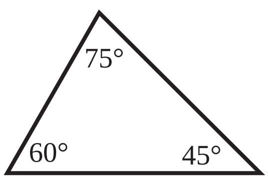
x: Forskel mellem vinklerne i grader
y: Antal elever, der vurderede vinklerne som ens

x:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
y:	18	18	17	16	14	12	10	9	7	5	4	3	2	2	1

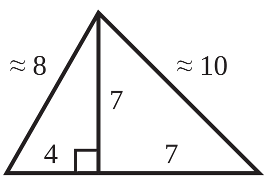
Det viser sig ved en statistisk undersøgelse (normalfordeling, spredning), at 99 % af eleverne opfattede to vinkler som forskellige, hvis deres forskel var mindst 15°.

Den 'vilkårlige' spidsvinklede trekant skal derfor opfylde, at hver af dens vinkler adskiller sig fra en ret vinkel med mindst 15° og to vilkårlige af dens vinkler har en forskel på mindst 15°. Altså har vi følgende

Sætning
Der findes (på nær ligedannethed) præcis én vilkårlig spidsvinklet trekant. Dens vinkler er 45°, 60° og 75°.



Vilkårlig trekant



God tilnærmelse

På figuren er vist den vilkårlige trekant samt en god tilnærmelse, der kan bruges i et kvadratnet. Vi får, at arctan(7/4) = 60,25°.

Andre undersøgelser viste, at en forskel i gradtal på mindst 17° var påkrævet, for at 99 % af eleverne anså vinklerne for forskellige. I den vilkårlige stumpvinklede trekant skal den største vinkel være mindst 17° større end en ret vinkel, så

$$v = 107° + x$$

for et $x \geq 0$. Den næststørste vinkel er mindst 17° mindre end den rette, så

$$w = 73° - y$$

for et $y \geq 0$. Den mindste vinkel er så mindst 17° mindre end w, så

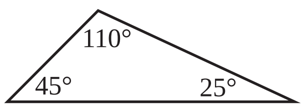
$$u = 56° - y - z$$

for et $z \geq 0$. Vinkelsummen giver, at

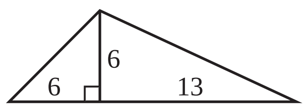
$$180° = 107° + x + 73° - y + 56° - y - z \quad \Leftrightarrow$$
$$56° = 2y + z - x$$

Dette bestemmer imidlertid ikke x, y og z entydigt, så der findes flere vilkårlige stumpvinklede trekanter. Man kan fx vælge $(v, w, u) = (111°, 53°, 16°)$, svarende til $(x, y, z) = (4°, 20°, 20°)$. En anden mulighed er $(v, w, u) = (107°,45°,28°)$, svarende til $(x, y, z) = (0°, 28°, 0°)$. Altså har vi

Sætning
Der findes ingen entydigt bestemt stumpvinklet vilkårlig trekant.



Vilkårlig trekant



God tilnærmelse

Vi kan imidlertid vælge vinklerne (110°, 45°,25°) i den stumpvinklede trekant. Figuren viser denne trekant sammen med en god tilnærmelse, der egner sig til at tegne på ternet papir eller på tavler med kvadratnet. Her er arctan(6/13) = 24,78°. Den gode tilnærmelse har desuden et areal på 57, hvilket virker temmelig vilkårligt!

Enhver 'ordentlig' matematiklærer bør naturligvis have den spidsvinklede og stumpvinklede 'vilkårlige' trekant parate i sin værktøjskasse.

Henvisninger

Bernhard Tergan: *Das allgemeine Dreieck* (Praxis der Mathematik 1981, s. 48)
G. A. Jürgen: *Das allgemeinste Dreieck* (Praxis der Mathematik 1981, s. 117)