Det dobbelttydige trekantstilfælde

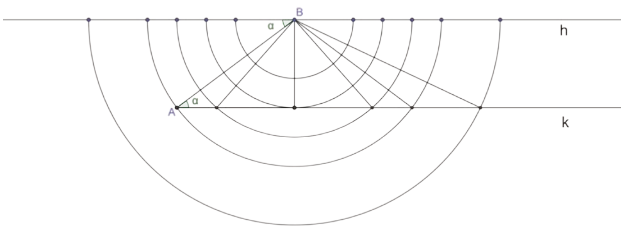
HEINE STRØMDAHL, Københavns Kommunes Ungdomsskoler

Formålet med denne artikel er at formulere en meget simpel grafisk løsningsmetode til det dobbelttydige trekantstilfælde med GeoGebra programmet og vise, at

- løsningsbetingelser for det dobbelttydige trekantstilfælde kan findes ved flere forskellige og forholdsvis enkle geometriske betragtninger
- de samme betingelser kan genfindes ved enkel algebraisk geometri
- formulere nogle ideer til gymnasieopgaver om det dobbelttydige trekantstilfælde

Enkle indledende geometriske slutninger ud fra en tegning.

For en trekant er der givet to talværdier for to sider (sidelængder) samt en talværdi for en vinkel, der har en af de to sider som hosliggende side. De to sidelængder og vinklen betegnes ved a, c og A. Kan der dannes en eller flere trekanter med disse mål, eller er det en umulighed at danne en trekant med disse mål? Vi tænker i denne indledning på A og c som konstanter og a som variablen.



Antag først, at $A = \alpha < 90°$. Igennem hele denne artikel betegnes vinkel A ofte – men dog ikke altid – ved α. Betragt figuren ovenfor og bemærk, at $|AB| = c$. På figuren er der to parallelle linjer, h og k. Hvornår er der løsninger?

Løsningerne kan findes ved at undersøge skæringspunkter mellem halvlinjen k og koncentriske cirkler med centrum i punkt B. Der opdeles i en række deltilfælde, som alle er illustreret på figuren.

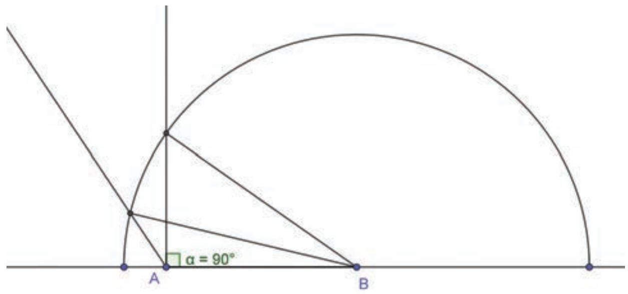
Der er præcis én løsning, når cirklen med centrum i punkt B og radius a tangerer halvlinjen k. Dette er tilfældet, når der dannes en retvinklet trekant ABC med $\sin A = a/c \Leftrightarrow a = c \cdot \sin A$.

Når $a < c \cdot \sin A$ er der ingen løsninger da cirkler med centrum i B og radius mindre end $c \cdot \sin A$ ikke skærer halvlinjen k.

Læseren opfordres nu til selv at finde og beskrive de tre resterende deltilfælde, stadig under den ovenstående antagelse:

- Der er to løsninger, netop når ...
- Der er også præcis en løsning, når ...
- Der er heller ingen løsninger når....

Antag dernæst, at $A \geq 90°$.

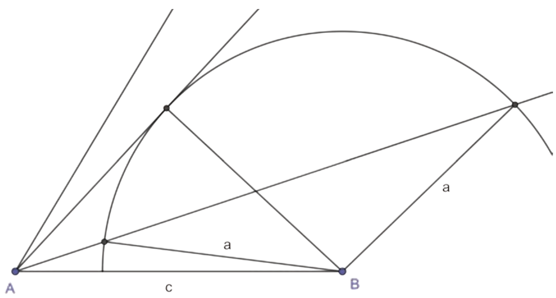


Det ses umiddelbart på figuren, at der ikke findes løsninger når $a \leq c$. Man finder endvidere, at der er præcis én løsning når $a > c$, da der dannes præcis et skæringspunkt mellem halvlinjen gennem A og cirklen med centrum i B.

Hermed er *det dobbelttydige trekantstilfælde* på sin vis færdigbelyst. Men, som det vil fremgå i det følgende, kan der komme mange flere detaljer på, og der er flere forskellige og interessante metoder at løse problemet på.

Et enkelt geometrisk bevis for løsningsbetingelserne for det dobbelttydige trekantstilfælde

I en trekant er der givet to talværdier for to sider samt en talværdi for en vinkel, der har en af de to sider som hosliggende side, dvs. der er givet tre talværdier for to sider og en ikke–mellemliggende vinkel. De to sidelængder og vinklen betegnes ved a, c og A. Kan der dannes en eller flere trekanter med disse mål, eller er det en umulighed at danne en trekant med disse mål? Se illustration nedenfor.



Sætning 1 Antal trekantsløsninger for det dobbelttydige tilfælde:

Hvis $a < c$: En løsning hvis og kun hvis $\cos A = \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}$

To løsninger hvis og kun hvis $\cos A > \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}$

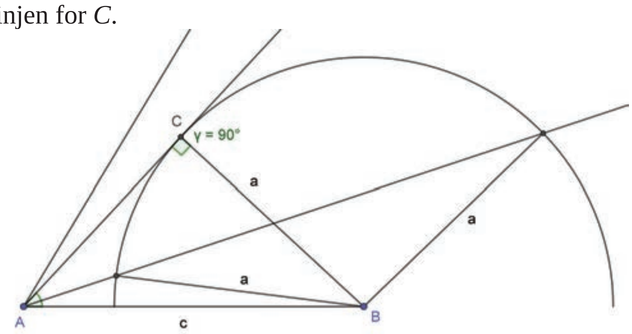
Ingen løsning hvis og kun hvis $\cos A < \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}$

Hvis $a = c$: En løsning hvis og kun hvis A < 90°
Ingen løsning hvis og kun hvis A $\geq$ 90°

Hvis $a > c$: Altid en enkelt løsning.

Bevis

Antag først, at $a < c$. Der er da netop én løsning, når cirklen med centrum i B og radius a tangeres af halvlinjen, der udgår fra punktet A og som tillige danner en vinkel på A grader med siden AB. Kald røringspunktet mellem cirklen og halvlinjen for C.



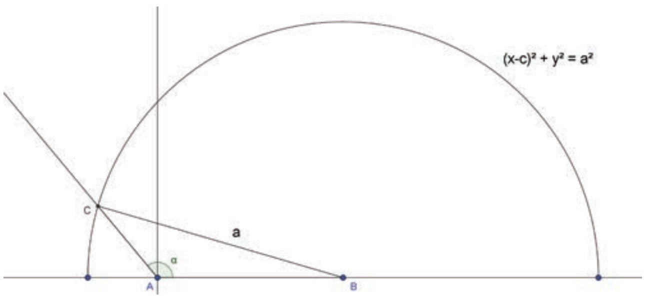
Halvlinjen tangerer cirklen, netop når der dannes en retvinklet-trekant ABC med C som den rette vinkel. Med en hypotenuse c og en katete a må den sidste katete b have værdien $\sqrt{c^2 - a^2}$. Den retvinklede trekant ABC med siderne a, b og c er dermed bestemt.

Trekant ABC har vinkelmål A hvis og kun hvis

$$\cos A = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}} \, .$$

Cosinusfunktionen er aftagende i intervallet fra 0° til 180° og opdelingerne ovenfor følger som konsekvens heraf.

Tilfældet, hvor a > c giver præcis én løsning. På figuren ses, at halvlinjen i den positive halvplan, der går igennem origo og bestemmes ved vinklen α, $0° < \alpha < 180°$, kun skærer cirklen et sted. På figuren illustreres tilfældet, hvor $90° < \alpha < 180°$.



Når $a > c$ er vinklen C altid spids, lidt geometriske undersøgelser ”viser det hurtigt”. Et algebraisk og et geometrisk bevis for påstanden findes i hhv. sætning 2 og i korollar 2.

Tilfældet, hvor $a = c$ er næsten trivielt.

Det følger, at i de tilfælde, hvor der er en enkelt løsning, er vinkel C altid spids – på nær tilfældet, hvor der tangeres. **qed**

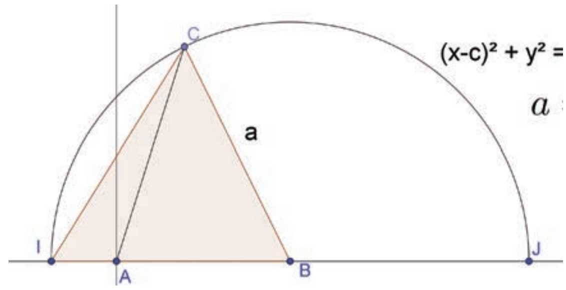
Sætning 2

For $a > c$ er der præcis én løsning og der gælder, at $C < 90°$.

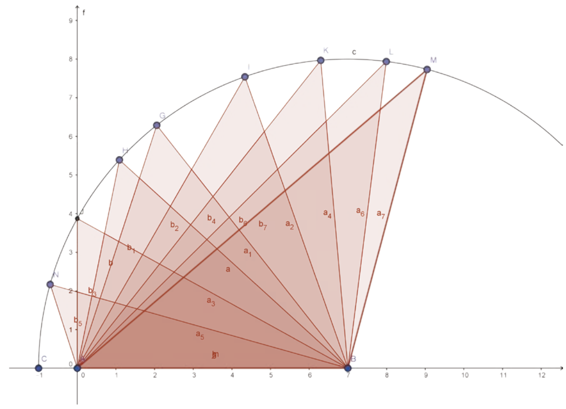
Geometrisk bevis

Første del af udsagnet er bevist i sætning 1. Hvis $\alpha \geq 90°$ er C klart mindre end 90°. Betragt tilfældet, hvor $\alpha < 90°$ og $B < 90°$.

På figuren nedenfor er trekant IBC ligebenet, og dermed er vinkel $ICB < 90°$. Vinkel ACB er tydeligvis mindre end vinkel ICB, og derfor er vinkel C mindre end 90°. **qed**



Det ses, at alle topvinklerne er mindre end 90°.

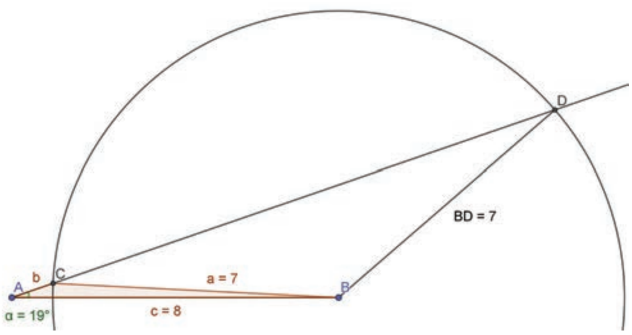


Sætning 3

Hvis a < c og $\cos A > \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}$ gælder, at de to løsninger har forskellige værdier for vinklen C, hhv.

$$C = sin^{-1}\left(\frac{c \cdot \sin A}{a}\right) \quad \text{og} \quad C = 180 - sin^{-1}\left(\frac{c \cdot \sin A}{a}\right)$$

Bevis



Af sætning 1 fremgår, at C = 90° netop når der tangeres, hvilket sker når $\cos A = \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}$. Det fremgår af tegningen, at trekant BCD er ligebenet. Derfor er $\angle ADB = \angle BCD = 180° - C < 90°$ og dermed er $C > 90°$. Sinusrelationen giver løsningen svarende til $\angle ADB$:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \Leftrightarrow \sin C = \frac{c \cdot \sin A}{a} \Leftrightarrow C = sin^{-1}\left(\frac{c \cdot \sin A}{a}\right)$$

Løsningen svarende til $\angle ACB$ er da $180 - C = sin^{-1}\left(\frac{c \cdot \sin A}{a}\right)$

qed

Sætning 4 Løsningsformler for b

1: Hvis $a < c$ og $\cos A > \sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}$ er der to løsninger til siden b:

$$b = c\cdot\cos A \pm \sqrt{a^2 - c^2\cdot\sin^2 A}$$

2: Hvis $a > c$ gælder følgende løsningsformel for b:

$$b = c\cdot\cos A + \sqrt{a^2 - c^2\cdot\sin^2 A}$$

Bevis
1: Ifølge sætning 1 er der to trekantsløsninger og dermed to løsninger for b. Ved hjælp af trigonometriske omskrivninger fås:

$$\begin{aligned}
&\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \Leftrightarrow\\
&b = \frac{a\cdot\sin B}{\sin A} = \frac{a\cdot\sin(180 - A - C)}{\sin A}\\
&= \frac{a\cdot\sin(A+C)}{\sin A} = \frac{a\cdot\sin A\cdot\cos C + a\cdot\cos A\cdot\sin C}{\sin A}\\
&= \frac{a\cdot\sin A\left(\pm\sqrt{1-\sin^2 C}\right) + a\cdot\cos A\cdot\sin C}{\sin A}\\
&= \pm a\cdot\sqrt{1-\sin^2 C} + \frac{c\cdot a\cdot\cos A\cdot\sin A}{a\cdot\sin A}\\
&= \pm a\cdot\sqrt{1-\sin^2 C} + c\cdot\cos A\\
&= c\cdot\cos A \pm \sqrt{a^2 - a^2\cdot\sin^2 C}\\
&= c\cdot\cos A \pm \sqrt{a^2 - c^2\cdot\sin^2 A}
\end{aligned}$$

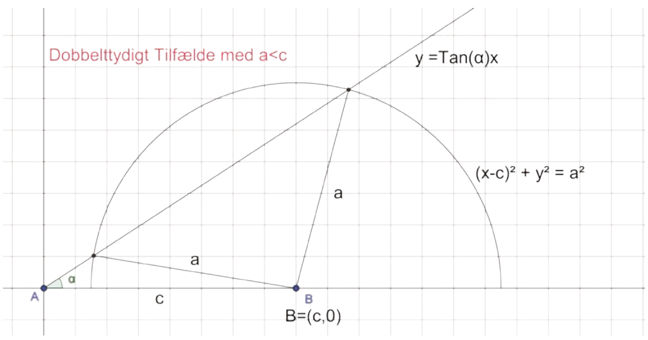
Dette er udtrykket for to løsninger for b.

2: Ifølge sætning 2 er C < 90°. Derfor er $\cos C = +\sqrt{1-\sin^2 C}$ og formlen ovenfor bliver til $b = c\cdot\cos A + \sqrt{a^2 - c^2\cdot\sin^2 A}$.

qed

Det dobbelttydige trekantstilfælde undersøgt ved elementær algebraisk geometri

For gymnasieelever kunne det være en god opgave at beregne betingelserne for trekantsløsninger ved enkel algebraisk geometri i planen og evt. efterfølgende finde frem til samme resultater ved den mere ligefremme løsning med cosinusrelationen.



Punkterne A og B i planen er bestemt ved $A = (0, 0)$ og $B = (c, 0)$. Betragt halvcirklen i øvre halvplan med radius a og centrum i B. Betragt endvidere halvlinjen med endepunkt i origo og hældningskoefficient $\tan A$; $0° < A < 90°$ eller $90° < A < 180°$.

På tegningen betegnes vinklen med α, det samme er tilfældet i de følgende omformninger. Trekantsløsninger findes der, hvor halvlinjen skærer halvcirklen. Det antages, at y er større end nul i skæringspunkterne.

Cirklens forskrift: $(x-c)^2 + y^2 = a^2 \Leftrightarrow y^2 = a^2 - (x-c)^2$

Halvlinjens forskrift: $y = \tan\alpha\cdot x$

For $0° < \alpha < 90°$ er der kun positive løsninger for x, da $\tan\alpha$ er positiv. Tilsvarende er der kun negative løsninger for x, når $90° < \alpha < 180°$, da $\tan\alpha$ er negativ. Dvs. der er kun skæringspunkter mellem halvlinjen og cirklen, når

$$0° < \alpha < 90° \wedge x > 0 \quad \text{og} \quad 90° < \alpha < 180° \wedge x < 0$$

Under disse antagelser kan x findes ved

$$\begin{aligned}
&y^2 = a^2 - (x-c)^2 \Leftrightarrow\\
&(\tan\alpha\cdot x)^2 = a^2 - (x-c)^2 \Leftrightarrow\\
&(\tan^2\alpha + 1)x^2 - 2c\cdot x + (c^2 - a^2) = 0 \qquad (1)
\end{aligned}$$

Denne andengradsligning har diskriminanten

$$D = 4c^2 - 4\cdot(\tan^2\alpha + 1)(c^2 - a^2) = 4\left(\tan^2\alpha\cdot(a^2 - c^2) + a^2\right) \qquad (2)$$

og for $D \geq 0$ er løsningerne

$$x = \frac{2c \pm \sqrt{4(\tan^2\alpha\cdot(a^2-c^2) + a^2)}}{2\cdot(\tan^2\alpha + 1)} = \cos^2\alpha\cdot\left(c \pm \sqrt{\frac{D}{4}}\right) \qquad (3)$$

Ved det sidste lighedstegn er anvendt den trigonometriske identitet:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha + 1 \qquad (4)$$

Inspektion for løsninger

Vi kan nu inspicere andengradsligningen (3) for løsninger i området $0° < \alpha < 90° \wedge a < c$. Det giver:

$D = 0$: En løsning bestemt ved $x = c\cdot\cos^2\alpha$

$D > 0$: To løsninger bestemt ved $x = \cos^2\alpha\cdot\left(c \pm \sqrt{\frac{D}{4}}\right)$

I området $0° < \alpha < 90° \wedge a = c$ er $D = 4a^2 = 4c^2$. Det giver en enkelt løsning $x = 2c\cdot\cos^2\alpha$, da løsningen $x = 0$ ikke giver en egentlig trekant.

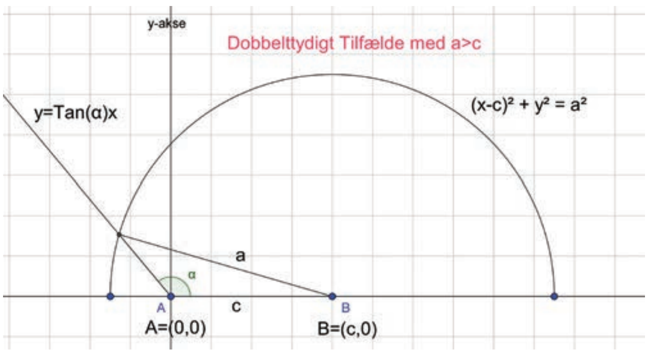
I området $0° < \alpha < 90° \wedge a > c$ er der altid to løsninger da $D > 0$. Den ene løsning er dog negativ og må forkastes, hvorfor den egentlige løsning er $x = \cos^2\alpha\cdot\left(c + \sqrt{\frac{D}{4}}\right)$.

Overblik over de forskellige løsningstilfælde for ligning (1)

Tilfælde	Antal løsninger	Løsning
$0° < \alpha < 90° \;\wedge\; a < c \;\wedge\; D < 0$	Ingen	
$0° < \alpha < 90° \;\wedge\; a < c \;\wedge\; D = 0$	En	$x = c \cdot \cos^2 \alpha$
$0° < \alpha < 90° \;\wedge\; a < c \;\wedge\; D > 0$	To	$x = \cos^2 \alpha \cdot \left(c \pm \sqrt{\frac{D}{4}} \right)$
$0° < \alpha < 90° \;\wedge\; a > c$	En	$x = \cos^2 \alpha \cdot \left(c + \sqrt{\frac{D}{4}} \right)$
$0° < \alpha < 90° \;\wedge\; a = c$	En	$x = 2c \cdot \cos^2 \alpha$
$90° < \alpha < 180° \;\wedge\; a \leq c$	Ingen	
$90° < \alpha < 180° \;\wedge\; a > c$	En	$x = \cos^2 \alpha \cdot \left(c - \sqrt{\frac{D}{4}} \right)$
$\alpha = 90° \;\wedge\; a > c$	En	$x = 0$ og $b = \sqrt{a^2 - c^2}$

I området $90° < \alpha < 180° \wedge a \leq c$ er der kun løsningen $x = 0$ eller positive løsninger til (3), som alle må forkastes. Dette følger af, at

$$\frac{D}{4} = \tan^2 \alpha \cdot \left(a^2 - c^2\right) + a^2 < a^2 \Rightarrow$$
$$\sqrt{\frac{D}{4}} < \sqrt{a^2} = a \leq c$$



I området $90° < \alpha < 180° \wedge a > c$ er to løsninger, men det kan som ovenfor vises, at den ene er positiv og må forkastes. Den eneste løsning er derfor $x = \cos^2 \alpha \cdot \left(c - \sqrt{\frac{D}{4}} \right)$.

I specialtilfældet $\alpha = 90°$ gælder (3) ikke og vi må tilbage til (1). Løsninger findes op ad y–aksen, hvor $x = 0$. Indsættes i (1) fås

$$y^2 = a^2 - (x - c)^2 \quad \wedge \quad x = 0 \Leftrightarrow$$
$$y^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow$$
$$b = y = \sqrt{a^2 - c^2}$$

I dette specialtilfælde er der én trekantsløsning hvis og kun hvis $a > c$.

Løsningerne i de enkelte tilfælde er samlet i oversigten ovenfor. Det ses i skemaet, at betingelserne for trekantsløsninger, som er fundet ved algebraisk geometri hhv. trigonometri og geometri i *sætning 1* er identiske.

Beregning af siden *b*

Når betingelserne er på plads, kan der ud fra løsningerne udledes en formel til beregning af siden b:

$$b = \cos(\alpha) \cdot c \pm \sqrt{a^2 - c^2 \cdot \sin^2(\alpha)}$$

Bevis

Løsningerne findes i $x = \cos^2(\alpha)\left(c \pm \sqrt{\frac{D}{4}} \right)$, jf. (3).

Punkt C i en trekantsløsning betegnes ved $C = (x, y)$. Da er $C = (x, y) = (x, \tan(\alpha) \cdot x)$, hvor x er en løsning. Beregning af længden af linjestykket AC giver $b = \sqrt{x^2 + (\tan(\alpha) \cdot x)^2}$, der videre omskrives til

$$b^2 = x^2 + (\tan(\alpha) \cdot x)^2 = \left(\tan^2(\alpha) + 1\right) \cdot x^2$$
$$= \left(\tan^2(\alpha) + 1\right) \cdot \left(\cos^2(\alpha) \cdot \left(c \pm \sqrt{\frac{D}{4}} \right) \right)^2$$
$$= \frac{1}{\cos^2(\alpha)} \cdot \cos^4(\alpha) \cdot \left(c \pm \sqrt{\frac{D}{4}} \right)^2$$
$$= \cos^2(\alpha)\left(c \pm \sqrt{\frac{D}{4}} \right)^2 = \left(\cos(\alpha) \cdot c \pm \cos(\alpha) \cdot \sqrt{\frac{D}{4}} \right)^2$$

Vha. omskrivningerne

$$\cos^2(\alpha)\cdot\frac{D}{4}=\cos^2(\alpha)\cdot\left(\tan^2(\alpha)\cdot\left(a^2-c^2\right)+a^2\right)$$
$$=\sin^2(\alpha)\cdot a^2-\sin^2(\alpha)\cdot c^2+\cos^2(\alpha)\cdot a^2$$
$$=a^2-c^2\cdot\sin^2(\alpha)$$

fås

$$b^2=\left(\cos(\alpha)\cdot c\pm\cos(\alpha)\cdot\sqrt{\frac{D}{4}}\right)^2$$
$$=\left(\cos(\alpha)\cdot c\pm\sqrt{\cos^2(\alpha)\cdot\frac{D}{4}}\right)^2$$
$$=\left(\cos(\alpha)\cdot c\pm\sqrt{a^2-c^2\cdot\sin^2(\alpha)}\right)^2 \quad\Leftrightarrow$$
$$b=\left|\cos(\alpha)\cdot c\pm\sqrt{a^2-c^2\cdot\sin^2(\alpha)}\right|$$

Ved fortegnsundersøgelse fås nu, at

$$\cos(\alpha)\cdot c+\sqrt{a^2-c^2\cdot\sin^2(\alpha)}>0$$

altid er sand for $0° < \alpha < 90°$. For $90° < \alpha < 180°$ er udsagnet opfyldt hvis og kun hvis $a > c$. Tilsvarende gælder der, at

$$\cos(\alpha)\cdot c-\sqrt{a^2-c^2\cdot\sin^2(\alpha)}>0$$

er sand for $0° < \alpha < 90°$ hvis og kun hvis $a < c$. Udsagnet er altid falsk for $90° < \alpha < 180°$. **qed**

Præcis det samme resultat kan findes ved hjælp af cosinusrelationen.

Nogle ideer til gymnasieopgaver

Essensen er at gennemføre beviserne, evt. som projektarbejde, og kode et enkelt matematikprogram til at verificere de fundne sammenhænge.

1. Bevis ved enkle geometriske argumenter, at vinkel C er mindre end 90° grader, når $a > c$.

2. Bevis sætning 1 om antallet af trekantsløsninger for det dobbelttydige tilfælde ud fra enkle geometriske overvejelser.

3. Bevis sætningen om antallet af trekantsløsninger for det dobbelttydige tilfælde ved algebraisk geometri og find løsningsformler for sidelængden b og vinkel C.

4. Bevis, at løsningsformlerne for sidelængden b og vinkel C også kan findes ved cosinusrelationen.

5. Kod et geometriprogram i Excel eller i et andet værktøj, som beregner løsninger for det dobbelttydige tilfælde.

6. Beskriv en simpel grafisk løsningsmetode til det dobbelttydige trekantstilfælde med GeoGebra eller andet CAS–program.

Eksempel på metode til punkt 6.
Afsæt punkterne (0, 0) og (c, 0) i et koordinatsystem. Tegn en cirkel med radius a og centrum i (c, 0). Tegn linjen $y = \tan A \cdot x$. Find skæringspunkterne mellem linjen og cirklen i den øvre halvplan (hvis der findes skæringspunkter). Skæringspunkterne er hjørnepunkterne C for de trekantsløsninger, der måtte findes med de givne talværdier for a, c og A. Hvis $A = 90°$ tegnes linjen $x = 0$ i stedet.

Formelsamling over det dobbelttydige tilfælde

For en trekant ABC er a, c og A givet. Trekantsløsninger med de givne værdier beskrives i seks forskellige tilfælde

$$\bar{D}=a^2-c^2\cdot\sin^2(A)$$

Tilfælde	**Trekantsløsninger**	
$0° < A < 90° \wedge a < c \wedge \bar{D} < 0$	Ingen	
$0° < A < 90° \wedge a < c \wedge \bar{D} = 0$	En	$b = c\cdot\cos(A)$ $\quad C = 90°, B = 90° - A$
$0° < A < 90° \wedge a < c \wedge \bar{D} > 0$	To	$b_1 = c\cdot\cos(A)+\sqrt{\bar{D}}$ $\quad C_1 = \sin^{-1}\left(\frac{c\cdot\sin A}{a}\right)$
		$b_2 = c\cdot\cos(A)-\sqrt{\bar{D}}$ $\quad C_2 = 180° - \sin^{-1}\left(\frac{c\cdot\sin A}{a}\right)$
$a > c$	En	$b = c\cdot\cos(A)+\sqrt{\bar{D}}$ $\quad C = \sin^{-1}\left(\frac{c\cdot\sin A}{a}\right)$ $\quad C < 90°$
$0° < A < 90° \wedge a = c$	En	$b = 2c\cdot\cos(A),\ B = C = 90° - \frac{A}{2}$
$90° \le A < 180° \wedge a \le c$	Ingen	