Cosinusrelationen – et par bemærkninger

Jens Carstensen, Frederiksberg

Cosinusrelationen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos A$$

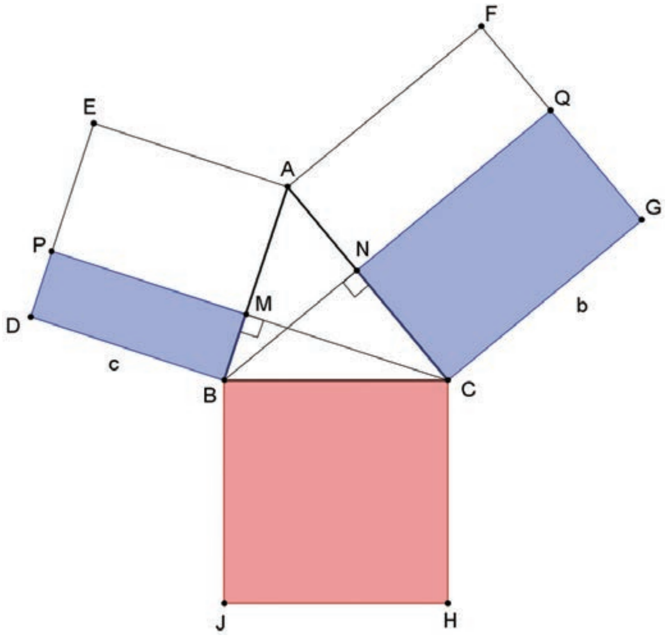
udledes ofte rent algebraisk ved hjælp af Pythagoras sætning anvendt to gange. Det fremgår så ikke, at Pythagoras sætning er et specialtilfælde af den mere generelle cosinusrelation. Vi kan imidlertid bringe en smule elegant geometri ind i den tørre algebra. Vi har nemlig, at

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos A \quad \Leftrightarrow$$
$$a^2 = b\cdot(b - c\cdot\cos A) + c\cdot(c - b\cdot\cos A) \qquad (1)$$

Vi deler op i tilfælde.

ΔABC spidsvinklet

På figuren er □*ABDE*, □*ACGF* og □*BCHJ* er kvadrater på trekantens sider. Højderne fra *B* og *C* skærer siderne i kvadraterne i *N* og *Q* og i *M* og *P* som vist.



I ΔAMC og ΔANB er henholdsvis

$$AM = b\cdot\cos A \quad \text{og} \quad AN = c\cdot\cos A$$

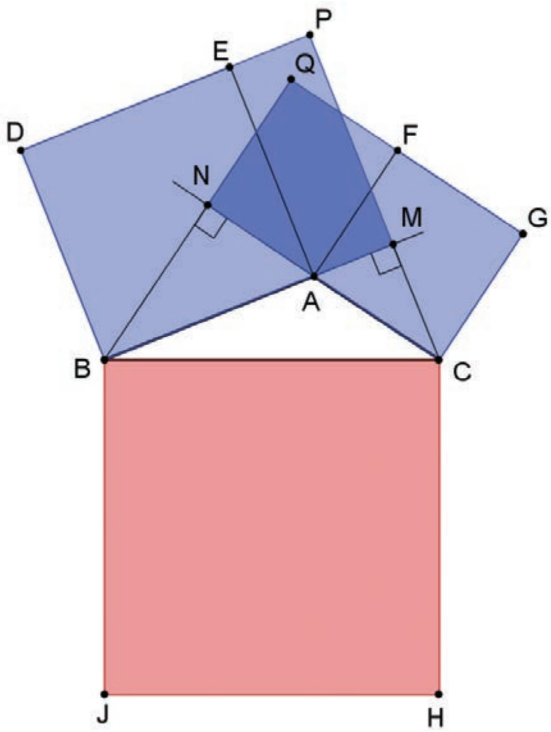
Dermed får vi

$$BM = AB - AM = c - b\cdot\cos A \quad \text{og}$$
$$CN = AC - AN = b - c\cdot\cos A$$

Dette giver os arealerne af rektanglerne *BMPD* og *CNQG*:

$$[BMPD] = BD\cdot BM = c\cdot(c - b\cdot\cos A)$$
$$[CNQG] = CG\cdot CN = b\cdot(b - c\cdot\cos A)$$

Cosinusrelationen (1) siger altså, at summen af arealerne af de to rektangler (blå) med vinkelspidser i *B* og *C* er lig med arealet af kvadratet (rødt) på siden *BC*.



ΔABC er stumpvinklet

Vi har, at $A > 90°$. Højderne fra *B* og *C* skærer forlængelserne af *CA* og *BA* i *N* og *M*, og vi får igen rektanglerne *CNQG* og *BMPD*. Disse rektangler har kvadraterne på siderne *AC* og *AB* som dele. I ΔAMC er

$$AM = b\cdot\cos(180° - A) = -b\cdot\cos A$$

hvoraf

$$BM = AB + AM = c - b\cdot\cos A$$

ganske som i det spidsvinklede tilfælde, men nu er dette tal større end *c*. Så er

$$[BMPD] = BD\cdot BM = c\cdot(c - b\cdot\cos A)$$

På same måde er

$$[CNQG] = b\cdot(b - c\cdot\cos A)$$

og cosinusrelationen siger igen, at arealet af kvadratet *BCHJ* (rødt) er lig med summen af arealerne af de to overlappende rektangler *BMPD* og *CNQG* (blå).

ΔABC er retvinklet

Her er $A = 90°$ og rektanglerne *BMPD* og *CNQG* falder sammen med kvadraterne *BAED* og *CAFG* og vi får Pythagoras sætning om arealerne af kvadraterne på siderne af en retvinklet trekant.

Vi har ikke her vist cosinusrelationen, men illustreret dens geometriske betydning efter, at den er udledt algebraisk. En elegant geometrisk udledning af cosinusrelationen med et minimum af kedsommelige algebraiske falbelader kan ses i LMFK–bladet for september 2009.

Henvisning

Jim Simons: *The Uncosine Rule* (Mathematics In School, March 2017, Vol. 46, No. 2).