Hvordan kan matematiklærere udvikle deres undervisningspraksis?

Britta Eyrich Jessen, Institut for Naturfagenes Didaktik

Vi kender det nok alle sammen: der kommer nye retningslinjer for undervisningen i vores fag, nogle emner ryger ud eller nedjusteres og andre kommer til. Undervisningen skal måske tilrettelægges efter andre undervisningsidéer (projekter, anvendelsesorientering, kompetencer mm.) Men hvor stor forskel gør nye læreplaner egentlig for undervisningen? Ville en kollega kunne se forskel på undervisningen før og efter en reform, ved andet end det faglige indhold?

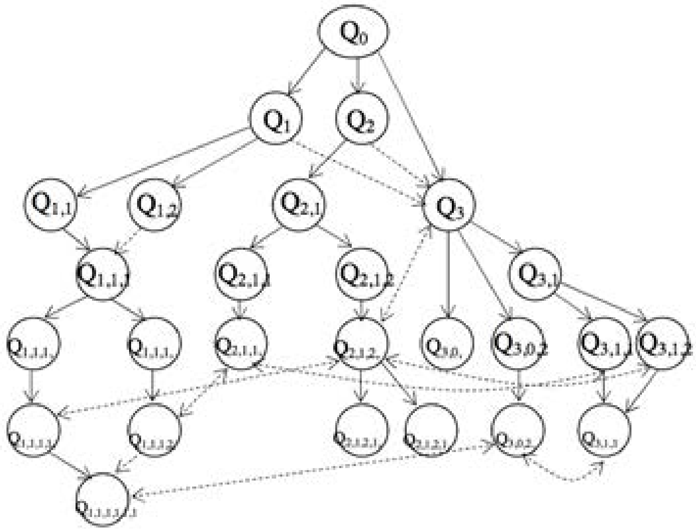
En gruppe på 47 modige og vel nok nysgerrige lærere meldte sig i foråret 2017 til efteruddannelseskurset ”Matematik i Forandring – kom godt i gang med reformen”, der er udbudt i et samarbejde mellem Matematiklærerforeningen og Institut for Naturfagenes Didaktik (IND) ved Københavns Universitet. Kurset er tilrettelagt således, at lærerne bliver introduceret til matematikdidaktiske idéer, der imødekommer de nye formuleringer i læreplaner og vejledningen for matematik. I lærerplanen står der, at *”Gennem en undersøgende tilgang til matematiske emner og problemstillinger skal elevernes matematiske begrebsapparat og innovative kompetencer udvikles. Dette sker blandt andet ved at tilrettelægge induktive forløb, hvor eleverne får mulighed for selvstændigt at formulere formodninger ud fra konkrete eksempler og eksperimenter”* (Undervisningsministeriet, 2017a). Man skal altså planlægge undervisningen, så den understøtter elevernes udvikling af sammenhængende begreber gennem et kreativt forhold til fagets indhold og metoder, dvs. gennem undersøgelsesbaserede aktiviteter. I vejledningen til læreplanen (Undervisningsministeriet, 2017b) findes der yderligere formuleringer omkring, hvordan ovenstående skal realiseres: *”Ræsonnement skal ekspliciteres i forbindelse med behandling af ren matematisk teori, i modellering og under en eksperimentel behandling af et stof, hvor eleverne selvstændigt opdager ”nye” matematiske sætninger […]”* (s. 21). Man forventes altså at undervise, så fagets deduktive sider udvikles sammen med de mere anvendelsesorienterede og ikke dyrkes parallelt gennem hhv. modelleringsopgaver og ved træning af beviser til mundtlig eksamen. I mange klasserum sker dette allerede. Men måske kræver det ny matematikdidaktisk inspiration hvis eleverne skal kunne opdage nye sætninger som en del af deres konstruktion af sammenhængende begrebsapparater? Vejledningen angiver videre, at *”Problemløsning skal også tilrettelægges, så eleverne selv lærer at formulere matematiske spørgsmål (og opgaver) med henblik på at kunne opstille problemformuleringer med relevante spørgsmål i modellering. Formuleringerne kan være målet i sig selv, eller spørgsmålene kan fx besvares (løses) af andre elever.”* (Undervisningsministeriet, 2017b, s. 22). Det er altså ikke nok, at eleverne skal opdage sætninger selv, de skal også stille faglige spørgsmål, som de selv og resten af klassen kan være med til at besvare og lære af. Hvordan sikre man det i praksis? Nedenfor gives et eksempel på, hvordan det kan realiseres i en klasse med matematik C.

Efteruddannelseskurset har til formål, at understøtte ovennævnte elementer af læreplan og vejledning, og samtidigt gøre dette i forløb, der handler om de nye faglige mål. Kurset byder derfor på en fagdidaktisk behandling af nogle af de nye emner: grundforløbets lineære funktioner, vektoralgebra til første år, sandsynlighedsteori samt idéer til metoder og begreber inden for diskret matematik. Kurset løber over 7 undervisningsgange á 4 timer og med en forventning om et tilsvarende tidsforbrug til forberedelse. Forberedelsen anser vi dog som en forberedelse, lærerne alligevel skulle lave for at tilpasse deres undervisning til 2017–reformen. Det har været en klar fordel for de deltagere, der havde en kollega med, når de skulle forberede dem mellem kursusgangene.

Hvordan får man elever til at undre sig?

Når vejledningen taler om, at eleverne skal stille spørgsmål handler det om mere og andet end *”jeg forstår det ikke, kan du sige det igen?”*, *”hvorfor skal vi lære dette?”* eller *”kan du sige det på en anden måde?”*. Det handler om at få eleverne til at undre sig, at være fagligt nysgerrige og selv være opsøgende og gerne kreative, når de udvikler nye svar. Gennem sådanne processer opstår læring. Den nysgerrige og undersøgende tilgang til at gøre og lære matematik er ikke ny. Michelle Artigue og Morten Blomhøj (2013) giver en karakteristik af, hvordan dette kan komme til udtryk i matematikundervisningen samt hvilke tanker, der er blevet gjort i relation til dette helt tilbage fra Dewey (1938) og Pólay (1945) og til i dag. En af de didaktiske rammer som i vid udstrækning understøtter udviklingen af elevernes selvstændige og kreative forhold til matematikfaget er den Antropologiske Teori for Didaktik (ATD) og undervisningsformatet ”Studie– og ForskningsForløb” (SFF). Efteruddannelseskurset har et erklæret mål om ikke at være en teoretisk indføring i et forskningsprogram, men derimod give mulighed for, at nogle interesserede lærere får praksisnære og relevante redskaber til at udvikle deres undervisning således, at de møder de nye læreplanskrav. Kursisterne er derfor også blevet introduceret til begreber og idéer til vidensdeling omkring undervisningspraksis, men ikke engageret i rendyrkede teoretiske analyser.

SFF er tidligere afprøvet i dansk kontekst gennem diverse projekter. Et SFF starter med et såkaldt genererende spørgsmål, Q_0. Et genererende spørgsmål skal være forståeligt for eleverne; de skal kunne forstå, hvad de bliver spurgt om, men ikke kunne svare uden, at de lærer noget nyt i faget. Et genererende spørgsmål kan være et åbent og autentisk spørgsmål men det, der adskiller Q_0 fra de øvrige typer er, at en foranalyse af Q_0 sikrer, at



Figur 1
Et videnslandkort over mulige afledte spørgsmål og deres relation til hinanden. Se Jessen (2014) for hvilke spørgsmål, der konkret er tale om.

eleverne på meningsfuld måde kan stille "afledte" spørgsmål til Q_0, der er med til at udvikle deres matematiske viden og kompetencer, når spørgsmålene stilles i kombination med udviklingen af delvise eller hele svar. Denne spørgsmål–svar–dynamik afbilledes i det vi kalder et videnslandkort, der bliver lærerens navigationsredskab, når denne skal iscenesætte elevernes undersøgende arbejde uden at komme til at begrænse de læringspotentialer, der er udfoldet i videnslandkortet. Figur 1 viser et eksempel på et videnslandkort, der omhandler spørgsmålet Q_0: Hvordan smertedækker man en patient med paracetamol, og hvordan kan dette modelleres matematisk? Spørgsmålet er udviklet som oplæg til SRO i matematik og biologi (se mere i Jessen, 2014).

En væsentlig del af denne form for undersøgelsesbaseret matematikundervisning er "studieprocessen", hvor det forudsættes, at eleverne tilegner sig ny viden og indsigt gennem ressourcer. Ressourcer kan være lærebogen, dynamiske arbejdsark i computerprogrammer som Nspire eller Geogebra, online videoer, andre hjemmesider, fysiske eksperimenter eller undersøgelse af sammenhænge i konkrete datasæt. Den nye viden bruges i kombination med elevens eksisterende viden, når eleverne forsøger at formulere svar. Dette kaldes forskningsprocessen. Altså udvides undersøgelsesbegrebet i SFF til at være mere end det, der vokser ud af elevernes interaktion med stoffet i sig selv. Lad os se nærmere på et konkret eksempel.

Findes der en firedoblingskonstant?

Jessen, 2018, beskriver hvordan en matematik C klasse blev undervist i begrebet eksponentialfunktion alene på baggrund af genererende spørgsmål, stilladseret gennem gruppearbejder, klassefremlæggelser og ved at tilbyde eleverne små afgrænsede ressourcerum (materialesamlinger). Vi vil i nedenstående præsentere elevernes arbejde med fordoblingskonstanten og gengive dele af klasserumsdialogen fra gruppefremlæggelserne.

Eleverne var delt ind i grupper på 3 elever, de fik stillet i alt 4 genererende spørgsmål, der tilsammen dækker hvad et STX matematik C–hold skulle lære om eksponentialfunktioner før 2017–reformen. Spørgsmålene handlede alle om børneopsparinger, hvoraf den ene havde en årlig rente på 2,5 %, hvor et bedsteforældrepar indskød 5000 kr i dåbsgave. Det tredje genererende spørgsmål lød:

"Q_3: Hvis børnene først må hæve pengene fra børneopsparingen, når beløbet er fordoblet, hvor længe skal de så vente?"

De fik foreslået nogle ressourcer som var valgfrie for dem at bruge (et par sider i Gyldendals Gymnasiematematik C, et par sider fra Hvad er matematik C og en video fra Fri Viden). De fik 7 minutter til at besvare spørgsmålet. Tidsintervallet er afstemt efter, at grupperne skal dele deres svar, når de er under udarbejdelse for, at kunne sparre med hinanden om deres idéer og hypoteser om et svar. Grupperne fremlagde, så de mindst stærke præsenterede først og dem der normalt præsterer godt, til sidst.

Første gruppe skrev på tavlen:

$$1{,}025^x \cdot 5000 = 1000$$
$$1{,}025^x = 2$$

De havde altså med deres læring fra de tidligere genererende spørgsmål, været i stand til at oversætte Q_3 til den øverste linje, hvorefter de ville løse ligningen mht. x, hvilket de kun kunne første skridt af. De stillede derfor det afledte spørgsmål: "Hvordan isolerer vi x, når denne står som eksponent?" Et godt og rimeligt fagligt spørgsmål som potentielt skaber behovet for at lære om logaritmer (noget der ikke havde været berørt endnu).

Den næste gruppe havde lært, at en god strategi i gymnasiet, kan være at læse de sider læreren forslår og skrev:

$$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(1{,}025)} = 28{,}07$$

De efterfølgende grupper gav et tilsvarende svar. Gruppe 6 sagde dog, at de var fortsat hvor gruppe 1 var endt. De skrev på tavlen:

$$1{,}025^x = 2$$
$$x \cdot \log(1{,}025) = \log(2)$$
$$\frac{x \cdot \log(1{,}025)}{\log(1{,}025)} = \frac{\log(2)}{\log(1{,}025)}$$
$$x = 28{,}07$$

Gruppe 7 præsenterede i stil med gruppe 2, men gruppe 8 sagde, da de gik til tavlen: ”Vi har gjort som gruppe 4, men hvad sker der der?” [og pegede på anden linje af gruppe 6’s arbejde].

Gruppe 6 svarede: ”Vi brugte reglen $\log\left(a^x\right) = x \cdot \log\left(a\right)$. Er det ikke sådan, at hvis $f(x) = 10^x$, så er den modsatte $f(x) = \log(x)$?” Herefter fandt gruppe 6 de ressourcer, hvor de havde fundet definitionen af 10–talslogaritmen og regnereglerne og delte med resten af klassen. Dette animerede de to sidste grupper til også at ville kunne argumentere med logaritmer og matematisk forklare, hvordan formlen for fordoblingskonstanten fremkommer.

Underviseren var imidlertid i tvivl om, hvilken forståelse klassen som helhed havde fået for fordobling og stillede derfor følgende afledte spørgsmål til klassen: ”Hvor lang tid ville det tage, hvis pengene blev på kontoen indtil beløbet var fordoblet igen?” Denne gang kom grupperne med flere forskellige argumenter, herunder tegneargumenter, nogle spurgte ind til forskellen på lineær og procentvis vækst, hvorefter flere grupper bød ind. Gruppe 7 og 8 valgte uafhængigt af hinanden at besvare de to afledte spørgsmål: ”Kan den dobbelte fordoblingskonstant beskrives som én?” og ”Hvordan kan vi finde en formel for T_4?”. På lidt forskellig vis kom de frem til, at

$$T_4 = \frac{\log(4)}{\log(a)}$$

hvor a er fremskrivningsfaktoren, dog fandt de formlen ud fra konkrete eksempler. Gruppe 8 gik videre og talte om en 8–doblingskonstant, og hvordan sådanne konstanter kan relatere til karakteristikken af eksponentiel vækst.

En sådan faglig nysgerrighed, videbegær og undersøgelseslyst i en klasse, hvor eleverne i gruppe 1 og 2 tidligere stod til dumpekarakterer på matematik C er en fornøjelse som underviser og noget, der for alvor rykker ved deres læring. Eleverne synes i evalueringerne, at undervisningen var meget hårdere på denne måde, at læreren intet lavede men også, at de selv oplevede at lære mere.

Hvordan bliver genererende spørgsmål daglig undervisning?

Tanker og idéer fra den forskning, som ovenstående eksempel er hentet fra, sker ikke alene ved, at man stiller åbne spørgsmål til eleverne. På efteruddannelseskurset har vi set på hinandens eksempler på genererende spørgsmål og videnslandkort, der udspænder de mulige afledte spørgsmål og afdækker læringspotentialet i det genererende spørgsmål. Det giver en vis sikkerhed for, hvordan en sådan undervisning kan komme til at fungere. Men vi er også inspireret af de japanske lektionsstudier (Miyakawa & Winsløw, 2013). Den del vi trækker på, handler om at gøre undervisningsplanlægningen, gennemførelsen og den efterfølgende refleksion til et fælles anliggende, med det formål at forbedre og udvikle den enkelte lærers undervisningspraksis. Kursusdeltagerne bliver derfor introduceret til at dele deres undervisningsplanlægning i lektionsplaner, der rummer en række stamdata, det genererende spørgsmål, forslag til ressourcer, hvilke forudsætninger eleverne forventes at have (bl.a. fra folkeskolen) samt det videnslandkort lærerne laver. Endelig gives et kort rids af en tidsplan samt hvad elever og lærer forventes at gøre hvornår. Undervejs i kurset bliver lektionsplanerne diskuteret. Det viser sig, at det ikke er helt så åbenlyst, hvad vi hver især mener med ”basalt kendskab til lineære sammenhænge”. Betyder det, at eleverne kan genkende udtryk på formen $y = ax + b$, kan eleverne grafisk fortolke a og b, eller kan de opskrive to–punktsformlerne? Lektionsplansarbejde gjorde lærerne mere eksplicit opmærksomme på overvejelser og valg omkring undervisningen. Herefter begyndte lærerne uopfordret at prøve små forløb af og dele erfaringer med hinanden gennem observationsnoter, billeder, lydfiler og små film, hvilket igen giver mulighed for et nyt lag af refleksion over, hvordan undervisningen yderligere kan udvikles så endnu flere elever lærer mest muligt. Det lykkes at gennemføre klasserumsobservationer, hvor deltagerne selv tager noter og billeder, hvorefter vi i fællesskab reflekterede over undervisningen. Det gav et skarpere blik for, hvem lærer hvad – og hvordan kan man som lærer yderligere understøtte denne proces. Undervejs har lærerne udviklet forløb om vektorer, hvor eleverne har skullet navigere skibe i Caribien, der er blevet regnet på, hvor gammel man er før end den videregående uddannelse giver anledning til større total livsindkomst end de venner, der tog kortere uddannelser – og hvor mange børn skal man egentlig have for at være nogenlunde sikker på at få to piger? Den detaljerede behandling af problemstillingerne har ført til diskussioner omkring vektorbegreber, definitioner, repræsentationsskift, det teoretiske og det statistiske sandsynlighedsbegreb etc. Det bliver spændende at se, hvordan forløb og idéer udfolder sig i næste gennemløb af kurset med start i august 2018 – vi glæder os til at jer!

Litteratur

- Artigue, M. & Blomhøj, M. (2013). *Conceptualizing inquiry–based education in mathematics*. ZDM The International Journal on Mathematics Education, 45 (6), s. 797–810.
- Jessen, B. E. (2014). *How can study and research paths contribute to the teaching of mathematics in an interdisciplinary setting?* Annales de didsactique et des sciences cognitives, 19, s. 199–224.
- Jessen, B. E. (2018). *How to generate autonomous questioning in secondary mathematics teaching?* Recherches en Didactique des Mathematiques, 37, (2/3), s. 217–247.
- Miyakawa, T. & Winsløw, C. (2013). *Devaloping mathematics teacher knowledge: the paradidactic infrastructure of ”open lesson” in Japan*. Journal of Mathematics Teacher Education, 16 (3), s. 185–209.
- Undervisningsministeriet (2017a). *Bilag 112, Matematik B – stx*, august 2017. uvm.dk/gymnasiale-uddannelser/fag-og-laereplaner/laereplaner-2017/stx-laereplaner-2017
- Undervisningsministeriet (2017b). *Matematik A/B/C, stx, Vejledning.* uvm.dk/gymnasiale-uddannelser/fag-og-laereplaner/laereplaner-2017/stx-laereplaner-2017