Modellering af kortdistanceløb

Kasper Bjering Søby Jensen, Roskilde Katedralskole

Som barn bemærkede jeg engang i starten af 90'erne, at Pietro Mennea's verdensrekordtid på 200 meter for mænd fra 1979 på 19,72 sekunder var præcist det dobbelte af Carl Lewis' verdensrekordtid på 100 meter fra 1991, som var 9,86 sekunder. Det betyder at løbernes gennemsnitsfart på begge distancer har været den samme, nemlig 10,14 m/s.

I dag er Usain Bolt's verdensrekordtid på 100 meter på 9,58 sekunder kun lige under det halve af hans verdensrekordtid på 200 meter på 19,19 sekunder (begge fra 2009). Gennemsnitsfarten ved de to løb var altså stort set ens, hhv. 10,422 m/s og 10,438 m/s.

Da gennemsnitsfarten må være kortere for løb under 100 meter og tilsvarende for løb over 200 meter [1)], må der oplagt findes et optimum et sted mellem de to løbedistancer. En løbedistance, hvor løberen kan opnå den størst mulige gennemsnitsfart. Det spørgsmål har jeg tidligere haft tænkt over, uden at undersøge nærmere. Så da en dygtig 3.g–elev i vinters ville skrive i matematik og idræt om modellering af kortdistanceløb, var det oplagt at inspirere ham til at forsøge at besvare dette problem.

En model for et løb

En model af et kortdistanceløb er fagligt interessant på mange måder. Der er tale om et grundlæggende kinematisk problem, der kan beskrives ved accelerations–, hastigheds– og stedfunktioner: $a(t)$, $v(t)$ og $s(t)$.

Af forskellige grunde er det fornuftigst at tage afsæt i hastighedsfunktionen $v(t)$. Den typiske standardmodel i dansk gymnasiematematik findes i Lars Bo Kristensens bog MatIdræt og er på formen (Kristensen 2013, s. 184ff):

$$v(t) = A\cdot(1 - e^{-k\cdot t}) \qquad (1)$$

Funktionen beskriver en begrænset vækst der opfylder at $v(0) = 0$ samt at $\lim_{t\to\infty} v(t) = A$. Konstanten A angiver altså løberens maksimale løbehastighed, som han kontinuert accelererer op imod uden nogensinde at opnå. Dermed bliver gennemsnitsfarten monotont voksende med løbedistancen. Altså ikke nogen brugbar model til at løse opgaven.

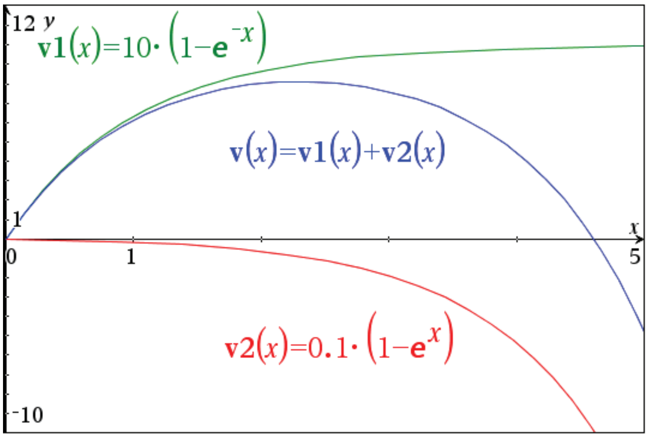
I artiklen Prendergast (2001) anskues problemet i stedet som en sum af to modsatrettede bidrag. Dels et accelerationsbidrag $v_1(t)$ magen til (1) og dels et træthedsbidrag $v_2(t)$:

$$v_2(t) = F\cdot(1 - e^{l\cdot t}) \qquad (2)$$

Ved at lægge de to bidrag sammen opnås en samlet hastighedsfunktion:

$$v(t) = A\cdot(1 - e^{-k\cdot t}) + F\cdot(1 - e^{l\cdot t}) \qquad (3)$$

Dynamikken i hvert af de to bidrag samt den samlede hastighedsfunktion ses af graferne i figur 1.



Figur 1. Graf for v(t) samt for hvert af de to led.

Det bliver nu muligt at bestemme accelerationsfunktionen for løbet $a(t) = v'(t)$:

$$a(t) = \frac{d}{dt}\left(A - A\cdot e^{-k\cdot t} + F - F\cdot e^{l\cdot t}\right)$$

$$a(t) = 0 - A\cdot(-k)\cdot e^{-k\cdot t} + 0 - F\cdot l\cdot e^{l\cdot t}$$

$$a(t) = A\cdot k\cdot e^{-k\cdot t} - F\cdot l\cdot e^{l\cdot t} \qquad (4)$$

Dermed bliver det muligt at finde det tidspunkt, hvor hastigheden topper, ved at løse $a(t) = 0$:

$$A\cdot k\cdot e^{-k\cdot t} - F\cdot l\cdot e^{l\cdot t} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$A\cdot k\cdot e^{-k\cdot t} = F\cdot l\cdot e^{l\cdot t} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{A\cdot k}{F\cdot l} = e^{(k+l)\cdot t} \quad \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{\ln(A\cdot k) - \ln(F\cdot l)}{k+l}$$

På tilsvarende vis kan stedfunktionen findes som $s(t) = \int v(t)\,dt$:

$$s(t) = \int\left(A - A\cdot e^{-k\cdot t} + F - F\cdot e^{l\cdot t}\right)dt$$

$$s(t) = A\cdot t - A\cdot\frac{1}{-k}\cdot e^{-k\cdot t} + F\cdot t - F\cdot\frac{1}{l}\cdot e^{l\cdot t} + c$$

$$s(t) = (A+F)\cdot t + \frac{A}{k}\cdot e^{-k\cdot t} + F\cdot t - \frac{F}{l}\cdot e^{l\cdot t} + c$$

Her kan integrationskonstanten c bestemmes med kriteriet $s(0) = 0$:

Matematik

$$s(0)=(A+F)\cdot 0+\frac{A}{k}\cdot e^{-k\cdot 0}+F\cdot 0-\frac{F}{l}\cdot e^{l\cdot 0}+c$$
$$=\frac{A}{k}-\frac{F}{l}+c \quad\Leftrightarrow\quad c=\frac{F}{l}-\frac{A}{k}$$

Den samlede stedfunktion bliver altså:

$$s(t)=(A+F)\cdot t+\frac{A}{k}\cdot e^{-k\cdot t}+F\cdot t-\frac{F}{l}\cdot e^{l\cdot t}+\frac{F}{l}-\frac{A}{k}$$
$$s(t)=(A+F)\cdot t-\frac{A}{k}\left(1-e^{-k\cdot t}\right)+\frac{F}{l}\left(1-e^{l\cdot t}\right) \qquad (5)$$

Endeligt er det nu muligt at opstille et udtryk for den gennemsnitsfart $\overline{v}(t)$, en løber har løbet med til tiden t:

$$\overline{v}(t)=\frac{s(t)}{t}=\frac{(A+F)\cdot t-\frac{A}{k}\left(1-e^{-k\cdot t}\right)+\frac{F}{l}\left(1-e^{l\cdot t}\right)}{t}$$
$$\overline{v}(t)=A+F-\frac{1}{t}\left(\frac{A}{k}\left(1-e^{-k\cdot t}\right)-\frac{F}{l}\left(1-e^{l\cdot t}\right)\right)$$

Opgaven er nu at finde maksimum for $\overline{v}(t)$. For at gøre dette kan man løse $\overline{v}\,'(t)=0$. Det lader sig umiddelbart kun gøre numerisk, så det er oplagt at begynde at anvende modellen praktisk.

Anvendelse af model

Det typiske udgangspunkt for anvendelse af modellen er målinger af en løbers løbetid og momentane hastighed ved hver 10. meter under et løb [2)]. Eleven jeg vejledte undersøgte Maurice Green's løb ved verdensmesterskaberne i 1997. Ved hjælp af fitning med skydere i Nspire bestemte eleven de fire konstanter til følgende værdier:

$A = 12 \qquad k = 0{,}753 \qquad F = 0{,}02 \qquad l = 0{,}365$

På den baggrund er det fx muligt at forsøge at reproducere Greens løbetid på 9,73 sekunder. Her er et CAS–værktøj som fx Nspire ingen dårlig hjælp. Resultatet ses på figur 2.

$$v(t):=12\cdot\left(1-e^{-0.753\cdot t}\right)+0.02\cdot\left(1-e^{0.365\cdot t}\right) \qquad \textit{Udført}$$
$$\int_0^{9.73} v(t)\,dt \qquad 99.1733$$
$$\text{solve}\left(\int_0^{t} v(t)\,dt=100,t\right)\Big|0<t<10 \qquad t=9.80312$$

Og det bliver også muligt at undersøge svaret på det egentlige spørgsmål. I Nspire kan man udnytte, at $s(t)$ kan bestemmes som $\int_0^t v(t)\,dt$ og dermed, at gennemsnitsfarten kan bestemmes som:

$$\overline{v}(t)=\frac{\int_0^t v(t)\,dt}{t}$$

Og dermed kan maksimumspunktet findes ved for t at løse ligningen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\int_0^t v(t)\,dt}{t}\right)=0$$

Med Nspire (se figur 3) er denne løsning fundet [3)] til $t = 12{,}149$. Herefter bestemmes den optimale løbedistance, hvor gennemsnitsfarten er størst S_{opt}:

$$S_{opt}=\int_0^{12{,}149} v(t)\,dt=125{,}532$$

Det viser sig altså, at Maurice Green vil opnå sin største gennemsnitsfart over et helt løb, hvis han løber ca. 125 meter.

$$v(t):=12\cdot\left(1-e^{-0.753\cdot t}\right)+0.02\cdot\left(1-e^{0.365\cdot t}\right) \qquad \textit{Udført}$$
$$\text{solve}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\int_0^{t} v(t)\,dt}{t}\right)=0,t\right) \qquad t=12.149$$
$$\int_0^{12.149} v(t)\,dt \qquad 125.532$$

Figur 3. Beregning i Nspire af løbeafstand med optimal.

På figur 4 er det vist ved grafer. Maksimumspunktet for gennemsnitsfartfunktionen er bestemt og viser sig forventeligt at ligge i skæringspunktet med grafen for $v(t)$. Den optimale løbetid kunne altså også være fundet ved at løse ligningen $v(t) = \overline{v}(t)$. Den optimale løbetid og dermed løbedistance skal altså findes der, hvor den gennemsnitlige og den momentane fart er ens.

Er det så et godt svar på spørgsmålet? Grafen på figur 4 viser at det ikke er et optimalt svar. For det ses at Maurice Green ifølge modellen ophører med at løbe efter ca. 17,5 sekunder. På det tidspunkt vil han ifølge modellen have løbet ca. 162 meter.

Figur 2.
Beregning af løbedistance hhv. løbetid med v(t) i Nspire.

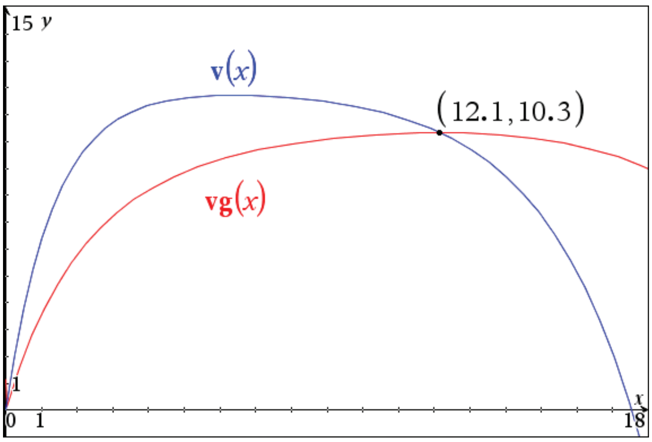
Modellen er altså ikke i stand til at reproducere den indledende observation af at gennemsnitsfarten på 100 meter og 200 meter er omtrent den samme. Det oprindelige spørgsmål er altså næppe besvaret og vil nok som minimum kræve analyser af et 200 meter–løb også. Måske Usain Bolts to verdensrekordløb kunne samanalyseres, hvis data kan findes. Ideen er hermed givet videre.

Didaktiske overvejelser

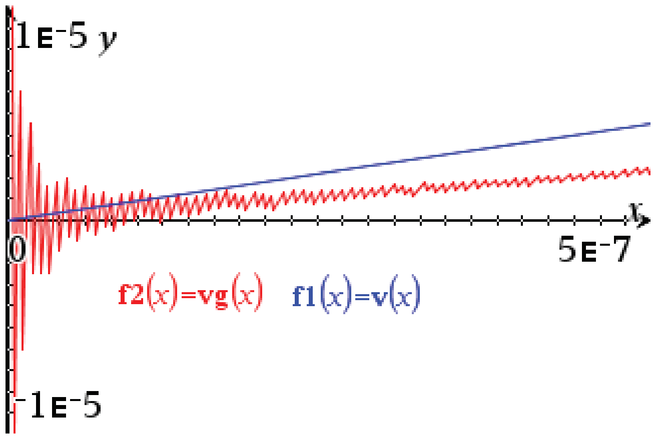
Afslutningsvis blot et par overvejelser over, hvorfor ovenstående eksempel kan være interessant for gymnasial matematikundervisning. En anerkendt udfordring i matematikundervisning er at finde cases til anvendelse af matematik, som fremstår relevante for eleverne. Eksemplet her vil formentlig kunne tale til en række af de ikke altid topmotiverede drenge. Tilgængeligheden af CAS–værktøjer vil oplagt gøre det nemmere.
Eksemplet er samtidig et konkret og realistisk eksempel på, hvordan den fra fysik velkendte disciplin kinematik kan bringes i anvendelse. I stedet for en eller anden fortænkt polynomielt beskrevet hastighedsfunktion, fremstår eksemplet her måske mere forståeligt.

Samtidig kan det være en praktisk indgang til arbejdet med de grundlæggende begreber om differentialkvotient og integral. Kristensen (2013) indeholder i den forbindelse særdeles gode afsnit.

Endeligt kan casen formentlig også omarbejdes til et spændende mundtligt eksamensspørgsmål ved den nye gruppedelprøve på B–niveau.



Figur 4
Grafer for hastighedsfunktion og gennemsnitsfartsfunktion.



Figur 5
Nspires grafer for hastigheds– og gennemsnitsfartsfunktionerne tæt ved 0.

Noter

1) Verdensrekorden på 60 meter (indendørs) fra 2018 (6,34 s) blev sat med en gennemsnitsfart på 9,46 m/s, mens verdensrekorden på 400 meter fra 2016 (43,03 s) blev sat med en gennemsnitsfart på 9,30 m/s.

2) En række historiske data kan (1/4–2018) findes her: jmureika.lmu.build/track/splits

3) Nspires numeriske behandling fører til, at den finder en række løsninger meget tæt på 0. For syns skyld er de fjernet fra figur 3. Problemet er illustreret ved graferne på figur 5.

4) Generelt har $\frac{F(x)}{x} = f(x)$ samme løsninger som $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{F(x)}{x}\right) = 0$.

Dette følger af:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{F(x)}{x}\right) = \frac{F'(x)\cdot x - F(x)\cdot 1}{x^2} = \frac{f(x)\cdot x - F(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x)\cdot x - F(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{F(x)}{x}$$

Litteraturliste

Kristensen, Lars Bo: *Matidræt*, Systime, 2013.

Prendergast, Kevin: *A Mathematical Model of the 100 m and what it means*, 2001, New Studies in Athletics, 3/2001. Lokaliseret 1/4–2018 på iaaf.org.