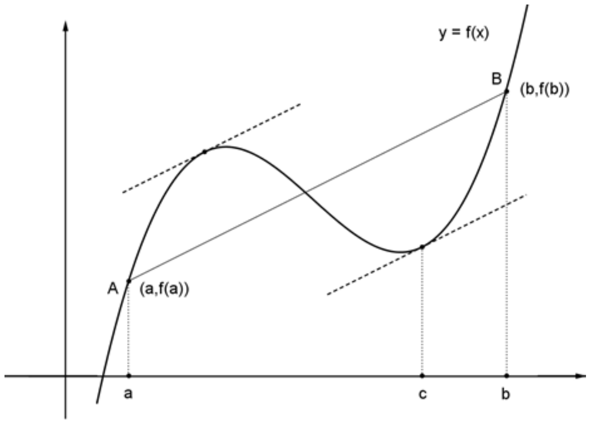
Middelværdisætningen – en bemærkning

Jens Carstensen, Frederiksberg

I 'gamle' dage indgik middelværdisætningen i differentialregningen i gymnasiet i forbindelse med beviser for sammenhængen mellem differentialkvotientens fortegn og funktionens monotoniforhold.

Sætning (Middelværdisætningen)
Hvis funktionen $f(x)$ er differentiabel i $]a;\, b[$ og kontinuert i $[a;\, b]$, findes et tal c mellem a og b så

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



På figuren illustreres dette ved, at tangenten i punktet $(c, f(c))$ er parallel med forbindelseslinjen mellem $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$.

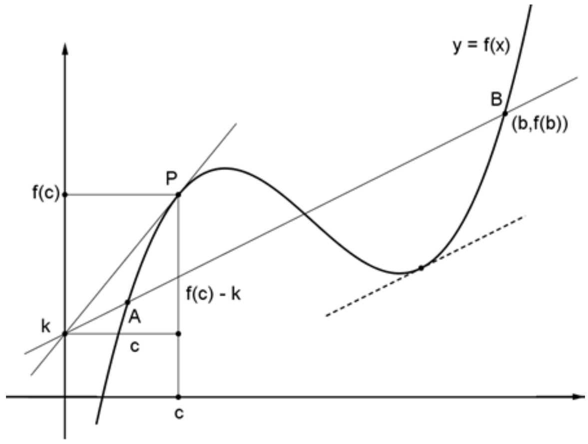
Et specialtilfælde af middelværdisætningen er Rolles sætning:

Sætning (Rolles sætning)
Hvis funktionen $f(x)$ er differentiabel i $]a;\, b[$ og kontinuert i $[a;\, b]$ og $f(a) = f(b)$, findes et tal c mellem a og b så $f'(c) = 0$.

Det er nok mindre kendt, at der (under visse betingelser) findes en tangent til grafen for $f(x)$ med samme skæringspunkt med y–aksen som forbindelseslinjen.

Sætning
Hvis funktionen $f(x)$ er differentiabel i $]a;\, b[$ og kontinuert i $[a;\, b]$, og a og b desuden har samme fortegn, findes et tal c mellem a og b, så tangenten til grafen i punktet $(c, f(c))$ skærer y–aksen i samme punkt $(0, k)$ som forbindelseslinjen mellem $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$.

Da a og b har samme fortegn, ligger grafen for $f(x)$ i intervallet $[a;\, b]$ helt til højre eller helt til venstre for y–aksen. Rent intuitivt kan man forestille sig en linje gennem forbindelseslinjens skæringspunkt $(0, k)$ på y–aksen dreje om dette punkt indtil den netop tangerer grafen. Vi giver alligevel et formelt bevis.



Bevis
Da punkterne $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ og $(0, k)$ ligger på linje er

$$\frac{f(a) - k}{a} = \frac{f(b) - k}{b}$$

Nu kan vi anvende Rolles sætning på funktionen

$$g(x) = \frac{f(x) - k}{x}$$

som opfylder, at $g(a) = g(b)$. Altså findes et tal c mellem a og b, så $g'(c) = 0$. Vi får den afledede

$$g'(x) = \frac{f'(x) \cdot x - (f(x) - k)}{x^2}$$

så at

$$g'(c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(c) \cdot c - (f(c) - k) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad k = f(c) - f'(c) \cdot c \qquad (1)$$

Linjen gennem $(0, k)$ og $(c, f(c))$ har ligningen

$$y = \frac{f(c) - k}{c} x + k \qquad (2)$$

og efter formlen for k i (1) er

$$\frac{f(c) - k}{c} = f'(c) \qquad (3)$$

så ligningen (2) bliver til

$$y = f'(c) \cdot x + k$$

Dermed er linjen gennem $(0, k)$ og $(c, f(c))$ tangent til grafen for $f(x)$ i $(c, f(c))$. Formlen (3) ses i øvrigt let på figuren.

Henvisning
George F. Feissner & Stephen G. Penrice: *But What About the y–Intercept of the Tangent Line?*, Crux Mathematicorum, 1994, s. 181.