Gyldne snit og Fibonacci–tal udvidet til større *n*.

Alf Riisom, Midtfyns Gymnasium

I det følgende undersøges, om teorien for Fibonaccitallene og det gyldne snit kan generaliseres til *n* startværdier. Det gyldne snit fremkommer, når man deler et linjestykke, så forholdet mellem hele stykket og den længste af de to dele er det samme som forholdet mellem det lange stykke og det korte. Man kan vise at dette forhold er det samme som grænseværdien af forholdet mellem et Fibonaccital, u_i og det foregående, når vi lader $i \to \infty$.

Ligeledes vises det, at en tilsvarende sammenhæng for det gyldne rektangel kan udvides til flere dimensioner.

Kigger vi på talfølgen, som er en udvidelse af Fibonaccitallene til *n* startværdier (*n–Naccital*)

$$F_1 = F_2 = \ldots = F_n = 1, \quad F_{i+1} = F_i + F_{i-1} + \ldots + F_{i-n+1}, \quad i \geq n$$

Nogle lader de $n - 1$ første værdier være 0, men det er uden betydning her. Vi definer:

$$u_i = \frac{F_{i+1}}{F_i}$$

Det er da kendt [1)], at u_i har en grænseværdi for $i \to \infty$, og at denne grænseværdi er den unikke positive rod i polynomiet:

$$P(z) = z^n - z^{n-1} - \ldots - z - 1$$

Lad os nu kigge på et linjestykke, som vi lader have længden 1. Ved det gyldne snit, deler man stykket op i 2 stykker med længden x og $1 - x$. Forholdet mellem det længste stykke x og resten, skal være det samme som forholdet mellem hele stykket og det længste.

Det giver følgende ligning for forholdet $z = \dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{1-x}$:

$$z^2 - z - 1 = 0$$

hvor $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ er de to løsninger. Den positive løsning er kendt som *det gyldne snit*, som også er grænseværdien for u_i, når $n = 2$. Og det er selvfølgelig denne, der er det søgte forhold.

Antag nu, at vi deler linjestykket op i *n* stykker på følgende måde. Forholdet mellem hele stykket og det længste er det samme som forholdet mellem det længste og det næstlængste, der igen er det samme som forholdet mellem det næstlængste og det tredjelængste ... der er det samme som forholdet mellem det næstkorteste og det korteste.

Se nedenstående Figur 1 (forholdene på figuren passer ikke nødvendigvis). Kald dette forhold *z*. Vi kan sætte længden af hele linjestykket til 1 uden tab af generellitet.

Der gælder så, at

$$z = \frac{1}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \ldots = \frac{x_{n-2}}{x_{n-1}} = \frac{x_{n-1}}{x_n}$$

og $x_1 = z^{-1}$

$$x_2 = x_1^2 = z^{-2}$$

$$x_3 = \frac{x_2^2}{x_1} = \frac{z^{-4}}{z^{-1}} = z^{-3}$$

...

$$x_n = \frac{x_{n-1}^2}{x_{n-2}} = \frac{\left(z^{n-1}\right)^2}{z^{n-2}} = z^{-n}$$

Men der gælder jo, at

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1 \Leftrightarrow z^{-1} + z^{-2} + \ldots + z^{-n} = 1$$

Ganger vi med z_n og rykker rundt, får vi

$$z^n - z^{n-1} - \ldots - z - 1 = 0 \qquad (1)$$

Så vi ser, at forholdet opfylder en ligning, der er en generalisering af ligningen for det gyldne snit, $z^2 - z - 1 = 0$. Da forholdet klart er positivt, må det have den samme værdi som grænseværdien fra *n*–Naccitallene (polynomiet har kun en positiv rod).

Det færdiggør behandlingen af det gyldne snit for et linjestykke, udvidet til *n* ”inddelinger”.

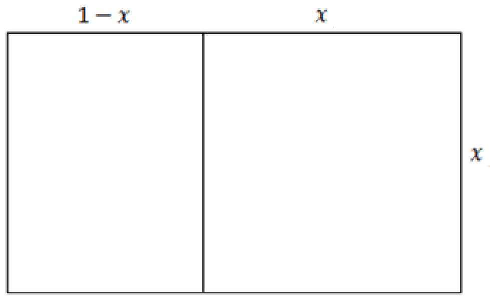
Lad os nu se på teorien for det gyldne rektangel. Vi minder om, at et rektangel kaldes gyldent, hvis forholdet mellem den lange og den korte side ikke ændrer sig, hvis man fjerner et kvadrat med kantlængde som den korte side, se Figur 2. Vi sætter igen den lange side til 1, og kalder den korte side *x*. Forholdet mellem dem kaldes *z*:

$$z = \frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

Efter et par simple omskrivninger fås den kendte ligning:

$$z^2 - z - 1 = 0$$

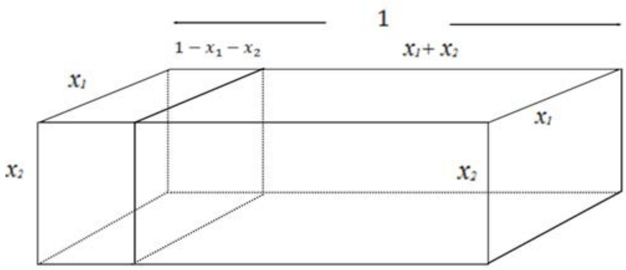
Figur 1



Figur 2

Lad os se, hvordan det ser ud i 3 dimensioner. Vi kigger på en (retvinklet) kasse og sætter den længste kantlængde til 1, den næstlængste til x_1 og den korteste til x_2. Vi kræver, at forholdet mellem den lange side og den mellemste er det samme som mellem den mellemste og den korte.

Vi kræver desuden, at det er muligt at fjerne en kasse med kantlængderne x_1, x_2 og $x_1 + x_2$ fra den oprindelige kasse, og få en ny kasse, hvor forholdet mellem kantlængderne i den nye kasse er det samme som forholdet mellem kantlængderne i den oprindelige kasse. Det kræver selvfølgelig at $x_1 + x_2 < 1$, men det sørger vores betingelse for. Desuden kræver vi, at siden $1 - x_1 - x_2$ er den korteste side i den nye kasse.



Figur 3

Hvis vi kalder forholdet for z, får vi, at

$$z = \frac{1}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} \quad \text{og} \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{1 - x_1 - x_2}$$

så

$$x_2 = x_1^2 \quad \text{og} \quad x_1 - x_1^2 - x_1 x_2 = x_2^2$$

Kombineres dette, fås

$$x_1 - x_1^2 - x_1^3 - x_1^4 = 0$$

Hvis man forkorter med x_1 (der ikke er 0), indsætter z og forlænger med z^3 fås

$$z^3 - z^2 - z - 1 = 0$$

som svarer til ligning (1) med $n = 3$. Hvis vi i stedet kræver, at $1 - x_1 - x_2$ er den mellemste side, vil vi få betingelserne

$$z = \frac{1}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} \quad \text{og} \quad \frac{x_1}{1 - x_1 - x_2} = \frac{1 - x_1 - x_2}{x_2}$$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 = 1 - 2x_1 - 2x_2 + x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2$$

$$\Leftrightarrow 0 = 1 - 2x_1 - x_1^2 + x_1^3 + x_1^4$$

$$\Leftrightarrow 0 = 1 - 2z^{-1} - z^{-2} + z^{-3} + z^{-4}$$

$$\Leftrightarrow 0 = z^4 - 2z^3 - z^2 + z^1 + 1$$

som har løsninger, der ikke relaterer til tribonaccitallene. Det samme er tilfældet, hvis vi kræver, at $1 - x_1 - x_2$ er den længste side.

Hvis vi nu generaliserer ovenstående til en n–kasse (med n indbyrdes vinkelrette kanter) i R^n fås, idet den længste kant igen sættes til 1, at

$$z = \frac{1}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \ldots = \frac{x_{n-2}}{x_{n-1}} \quad \text{og} \quad \frac{x_{n-2}}{x_{n-1}} = \frac{x_{n-1}}{1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-1}}$$

så

$$x_1 = z^{-1}, x_2 = x_1^2 = z^{-2}, x_1 x_3 = x_2^2 \Leftrightarrow x_3 = z^{-3} \ldots x_{n-1} = z^{-n+1}$$

og

$$\left(1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-1}\right) x_{n-2} = x_{n-1}^2$$

Kombineres det fås

$$\left(1 - z^{-1} - z^{-2} - \ldots z^{-n+1}\right) z^{-n+2} = \left(z^{-n+1}\right)^2$$

Hvis man forlænger med $(z^{n-1})^2 = z^{2n-2}$ og rykker rundt, fås

$$z^n - z^{n-1} - \ldots - z - 1 = 0$$

som er ligning (1). Da forholdet klart er positivt, må det have den samme værdi som grænseværdien fra n–Naccitallene. Det er lidt svært at forestille sig geometrisk, men man fjerner en n–kasse, hvor den længste kantlængde er summen af alle kanterne bortset fra den længste i den oprindelige, og resten er som i den oprindelige.

Det færdiggør udvidelsen af teorien for det gyldne rektangel til n dimensioner.

Henvisninger

On Generalized Fibonacci Numbers, Jacob B. Bacani and Julius T. Rabaco, Applied Mathematical Sciences, 18. marts 2015, https://arxiv.org/pdf/1503.05305.pdf.