Systematikken bag Bernoulli–tal

Emil Aagaard Clausen, 3.d, Køge Gymnasium

Bernoulli–tallene er en række tal, der er dybt forbundet med talteori. Tallene dukker blandt andet op i Riemanns zeta–funktion, gamma–funktioner, taylorpolynomier og meget mere. Man støder også på disse tal, når man observerer polynominerne, der repræsenterer summer som $\sum_{m=1}^{x} m^2$ og $\sum_{p=1}^{x} p^3$, der ved første øjekast ser ud til at følge simple mønstre og strukturer, men der ved nærmere observation er meget komplicerede. De første fire af disse polynomier ser således ud:

$$\sum_{m=1}^{x} m = \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{2}\cdot x$$

$$\sum_{p=1}^{x} p^2 = \frac{1}{3}\cdot x^3 + \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{6}\cdot x$$

$$\sum_{q=1}^{x} q^3 = \frac{1}{4}\cdot x^4 + \frac{1}{2}\cdot x^3 + \frac{1}{4}\cdot x^2$$

$$\sum_{r=1}^{x} r^4 = \frac{1}{5}\cdot r^5 + \frac{1}{2}\cdot r^4 + \frac{1}{3}\cdot r^3 - \frac{1}{30}\cdot x$$

Som det kan ses, er der intet tydeligt mønster i disse polynomier, hvilket også er tilfældet med Bernoulli–tallene:

$$B_0 = 1,\ B_1 = \pm\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30},$$
$$B_5 = 0,\ B_6 = \frac{1}{42},\ B_7 = 0,\ B_8 = -\frac{1}{30}$$

Det viser sig, at disse polynomier og Bernoulli–tallene hænger sammen således:

$$\sum_{m=1}^{x} m^n = \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n}\left(\binom{n+1}{j}\cdot B_j\cdot x^{n+1-j}\right)$$

Denne formel kaldes Faulhabers formel. Mønstrene i polynomierne grunder altså ud i Bernoulli–tallenes natur. Ved at konstruere en anden formel for $\sum_{m=1}^{x} m^n$ ville man kunne vise, hvilke mønstre og talstrukturer, der gemmer sig i denne del af talteorien, og derved give en bedre forståelse for systematikken bag Bernoulli–tallene. Dette vil ikke være den simpleste måde at vise denne systematik på, men fremgangsmåden samt udgangspunktet kan måske være med til at give en bedre forståelse af emnet.

x^{n+1}, hvor n og x er positive heltal, kan udtrykkes som summen af et polynomium af graden n, evalueret ved alle heltal fra 1 til x. Dette polynomiums koefficienter vil være lig med tallene fra række n + 1 i Pascals trekant, bare med alternerende fortegn og det første 1–tal undtaget. Som eksempel ses følgende:

$$\sum_{m=1}^{x}(2\cdot m - 1) = x^2$$

$$\sum_{p=1}^{x}(3\cdot p^2 - 3\cdot p + 1) = x^3$$

$$\sum_{q=1}^{x}(4\cdot q^3 - 6\cdot q^2 + 4\cdot q - 1) = x^4$$

$$\sum_{r=1}^{x}(5\cdot r^4 - 10\cdot r^3 + 10\cdot r^2 - 5\cdot r + 1) = x^5$$

Vil man have et udtryk for $\sum_{m=1}^{x} m^n$, kan man bruge det ovenstående faktum. Ved brug af faktorisering, kan man isolere m^n i polynomierne. Som eksempel ses følgende, hvor n = 1:

$$\sum_{m=1}^{x}(2\cdot m - 1) = x^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(\sum_{m=1}^{x} 2\cdot m\right) - x = x^2 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{m=1}^{x} m = \frac{x^2 + x}{2}$$

For at generalisere dette for alle gyldige værdier af n, må man først skrive koefficienterne som binomiale koefficienter. Som sagt følger koefficienterne Pascals trekant, så derfor vil koefficienterne til polynomierne være:

$$\binom{n+1}{1}, -\binom{n+1}{2}, \binom{n+1}{3}, -\binom{n+1}{4} \ldots \pm\binom{n+1}{n}, \pm\binom{n+1}{n+1}$$

Man bruger nu disse koefficienter i stedet:

$$\sum_{m=1}^{x}\left(\begin{matrix}\binom{n+1}{1}\cdot m^n - \binom{n+1}{2}\cdot m^{n-1} + \binom{n+1}{3}\cdot m^{n-2} - \\ \binom{n+1}{4}\cdot m^{n-3} \ldots \pm \binom{n+1}{n}\cdot m \pm \binom{n+1}{n+1}\end{matrix}\right) = x^{n+1} \Leftrightarrow$$

$$\sum_{m=1}^{x}\left(\begin{matrix}(n+1)\cdot m^n - \binom{n+1}{2}\cdot m^{n-1} + \binom{n+1}{3}\cdot m^{n-2} - \\ \binom{n+1}{4}\cdot m^{n-3} \ldots \pm (n+1)\cdot m \pm 1\end{matrix}\right) = x^{n+1}$$

Man bruger nu samme metode som i eksemplet:

$$\sum_{m=1}^{x}\left(\begin{matrix}(n+1)\cdot m^n - \binom{n+1}{2}\cdot m^{n-1} + \binom{n+1}{3}\cdot m^{n-2} - \\ \binom{n+1}{4}\cdot m^{n-3} \ldots \pm (n+1)\cdot m\end{matrix}\right) = x^{n+1} \pm x$$

Matematik

For at kunne gentage denne proces, skal man nu faktorisere $n + 1$ ud og dividere på begge sider af lighedstegnet:

$$\sum_{m=1}^{x}\left(m^n-\frac{\binom{n+1}{2}}{n+1}\cdot m^{n-1}+\frac{\binom{n+1}{3}}{n+1}\cdot m^{n-2}-\frac{\binom{n+1}{4}}{n+1}\cdot m^{n-3}\ldots\pm m\right)=\frac{x^{n+1}\pm x}{n+1}$$

Nu bliver det klart, at det næste skridt vil være at bruge formlen fra eksemplet, $\sum_{m=1}^{x} m=\frac{x^2+x}{2}$:

$$\sum_{m=1}^{x}\left(m^n-\frac{\binom{n+1}{2}}{n+1}\cdot m^{n-1}+\frac{\binom{n+1}{3}}{n+1}\cdot m^{n-2}-\frac{\binom{n+1}{4}}{n+1}\cdot m^{n-3}\ldots\pm\frac{\binom{n+1}{n-1}}{n+1}\cdot m^2\right)=\frac{x^{n+1}\pm x}{n+1}\pm\frac{x^2\pm x}{2}$$

For at forsætte denne procedure skal man kende formlen for $\sum_{m=1}^{x} m^2$. Derefter skal man kende formlen for $\sum_{m=1}^{x} m^3$, hvorefter man skal kende formlen for $\sum_{m=1}^{x} m^4$ og så videre. For at finde $\sum_{m=1}^{x} m^n$ med brug af denne metode, skal man altså kende $\sum_{m=1}^{x} m$, $\sum_{p=1}^{x} p^2$, $\sum_{q=1}^{x} q^3$ op til $\sum_{r=1}^{x} r^{n-1}$. Hvis et mønster i denne procedure kan isoleres, kan formlerne for polynomierne dog generaliseres. Der regnes videre fra den tidligere formel:

$$\sum_{m=1}^{x}\left(m^n-\frac{\binom{n+1}{2}}{n+1}\cdot m^{n-1}+\frac{\binom{n+1}{3}}{n+1}\cdot m^{n-2}-\frac{\binom{n+1}{4}}{n+1}\cdot m^{n-3}\ldots\pm m\right)$$

$$=\sum_{m=1}^{x} m^n-\sum_{p=1}^{x}\left(\frac{\binom{n+1}{2}}{n+1}\cdot p^{n-1}\right)+\sum_{q=1}^{x}\left(\frac{\binom{n+1}{3}}{n+1}\cdot q^{n-2}\right)$$
$$-\sum_{r=1}^{x}\left(\frac{\binom{n+1}{4}}{n+1}\cdot r^{n-3}\right)\ldots\pm\sum_{s=1}^{x}\left(\frac{\binom{n+1}{n-1}}{n+1}\cdot s^2\right)\pm\sum_{\square=1}^{x}\square$$

$$=\sum_{m=1}^{x} m^n-\frac{\binom{n+1}{2}}{n+1}\cdot\sum_{p=1}^{x} p^{n-1}+\frac{\binom{n+1}{3}}{n+1}\cdot\sum_{q=1}^{x} q^{n-2}$$
$$-\frac{\binom{n+1}{4}}{n+1}\cdot\sum_{r=1}^{x} r^{n-3}\ldots\pm\frac{\binom{n+1}{n-1}}{n+1}\cdot\sum_{s=1}^{x} s^2\pm\sum_{t=1}^{x} t=\frac{x^{n+1}\pm x}{n+1}$$

Denne formel viser igen, at den tidligere procedure kræver kendskab til alle polynomierne under n. Efter lidt mere arbejde, kan man finde det følgende mønster i formlen. Mønsterets plads i formlen vises bagefter. Det udnyttes, at $\binom{a}{b}=\frac{a!}{b!\cdot(a-b)!}$:

$$\frac{\binom{n+1}{2}}{n+1}=\frac{1}{2!}\cdot n$$

$$\frac{\binom{n+1}{2}}{n+1}\cdot\frac{\binom{n}{2}}{n}-\frac{\binom{n+1}{2}}{n+1}=\left(\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)\cdot n\cdot(n-1)$$

$$\frac{\binom{n+1}{2}}{n+1}\cdot\frac{\binom{n}{2}}{n}\cdot\frac{\binom{n-1}{2}}{n-1}-\frac{\binom{n+1}{2}}{n+1}\cdot\frac{\binom{n}{3}}{n}-\frac{\binom{n+1}{3}}{n+1}\cdot\frac{\binom{n-1}{2}}{n-1}+\frac{\binom{n+1}{4}}{n+1}$$
$$=\left(\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2!}-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{3!}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}\right)\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)$$

Der ses nu et mønster i parenteserne. Man starter med $\frac{1}{2!}$, hvorefter man får den næste ved at gange den forrige med $\frac{1}{2!}$ og lægge $-\frac{1}{3!}$ til. For at få den næste værdi, ganges den forrige med $\frac{1}{2!}$, hvorefter værdien, før den ganges med $-\frac{1}{3!}$, lægges til, hvorefter der så lægges $\frac{1}{4!}$ til. Mønsteret fortsætter således.

De første værdier er følgende:

$$c_1=\frac{1}{2!}=\frac{1}{2}$$

$$c_2=\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}=\frac{1}{12}$$

$$c_3=\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2!}-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{3!}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}=0$$

$$c_4=\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2!}-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{3!}-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{4!}$$
$$-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{2!}-\frac{1}{5!}=-\frac{1}{720}$$

Matematik

$$c_5 = \frac{1}{2!} \cdot c_4 - \frac{1}{3!} \cdot c_3 + \frac{1}{4!} \cdot c_2 - \frac{1}{5!} \cdot c_1 + \frac{1}{6!} = 0$$

$$c_6 = \frac{1}{2!} \cdot c_5 - \frac{1}{3!} \cdot c_4 + \frac{1}{4!} \cdot c_3 - \frac{1}{5!} \cdot c_2 + \frac{1}{6!} \cdot c_1 - \frac{1}{7!} = \frac{1}{30240}$$

Formlen for c_p er derfor den følgende (c_0 defineres som 1):

$$c_p = \frac{1}{2!} \cdot c_{p-1} - \frac{1}{3!} \cdot c_{p-2} + \frac{1}{4!} \cdot c_{p-3} \ldots \pm \frac{1}{p!} \cdot c_1 \pm \frac{1}{(p+1)!} \cdot c_0$$
$$= \sum_{n=1}^{p} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot c_{p-n} \right)$$

Mønsteret passer ind i den tidligere formel således:

$$\sum_{m=1}^{x} m^n = \frac{x^{n+1} \pm x}{n+1} + c_1 \cdot n \cdot \frac{x^n \pm x}{n} + c_2 \cdot n(n-1) \cdot \frac{x^{n-1} \pm x}{n-1} \ldots$$
$$+ c_{n-3} \cdot \frac{n!}{3!} \cdot \frac{x^4 + x}{4} + c_{n-2} \cdot \frac{n!}{2!} \cdot \frac{x^3 - x}{3} + c_{n-1} \cdot \frac{n!}{1!} \cdot \frac{x^2 + x}{2}$$
$$= \sum_{p=0}^{n} \left(c_p \cdot \frac{n!}{(n-p)!} \cdot \frac{x^{n+1-p} + (-1)^{n+1-p} \cdot x}{n+1-p} \right)$$

Man har nu konstrueret den ønskede formel for $\sum_{m=1}^{x} m^n$, der viser det dybtliggende mønster bag de tilsyneladende tilfældige polynomier. Ved brug af Faulhabers formel, kan man nu knytte Bernoulli–tallene, B_j, til tallene c_p:

$$\frac{1}{n+1} \cdot \sum_{j=1}^{n} \left(\binom{n+1}{j} \cdot B_j \cdot x^{n+1-j} \right)$$
$$= \sum_{p=0}^{n} \left(c_p \cdot \frac{n!}{(n-p)!} \cdot \frac{x^{n+1-p} + (-1)^{n+1-p} \cdot x}{n+1-p} \right)$$

Det viser sig, at sammenhængen mellem disse tal er meget simplere. Ved eksponentiel regression kan man nemlig se, at funktionen $2 \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \pi} \right)^p$ giver bedre og bedre approximationer for $|c_p|$ ved de lige, positive heltal. Det viser sig, at faktoren $|c_p|$ afviger fra funktionen med præcis $\zeta(p)$, som er Riemanns zeta–funktion:

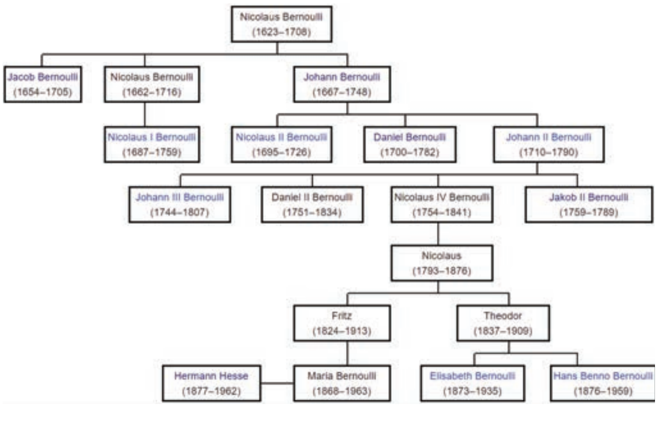
$$|c_p| = \zeta(p) \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \pi} \right)^p$$

Ifølge Euler, er værdierne af $\zeta(p)$ ved de lige, positive heltal givet ved den følgende formel:

$$\zeta(p) = \frac{|B_p| \cdot 2^p}{2 \cdot p!} \cdot \pi^p$$

Tallene c_p er derfor knyttet til Bernoulli-tallene, B_p, således:

$$\zeta(p) = \frac{|B_p| \cdot 2^p}{2 \cdot p!} \cdot \pi^p = \frac{|c_p|}{2 \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \pi} \right)^p} \quad \Leftrightarrow \quad c_p = \frac{B_p}{p!}$$



Jakob Bernoulli (1654 – 1705) var en af mange berømte matematikere og fysikere i Bernoulli–familien.