Firkantens cosinusrelation

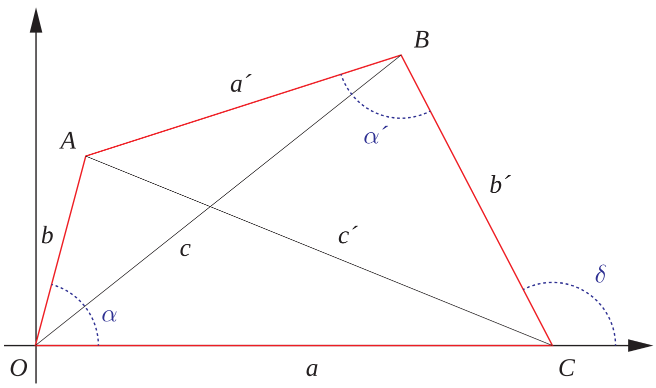
Søren Høgh, lektor emeritus

En stærk sætning om vilkårlige firkanter og nogle konsekvenser. Den følgende sætning, der omhandler vilkårlige firkanter og generaliserer en lang række velkendte sætninger (Pythagoras, cosinusrelationen, Ptolomæus) og derudover giver en række andre mærkværdigheder, er vist lidet kendt. Den er ikke omtalt i Jens Carstensens fine bøger om geometri. Jeg har den fra *Nordisk Matematisk Tidsskrift* (se nedenstående kildehenvisning). Den ligner den sædvanlige cosinusrelation, så vi kan jo kalde den *"firkantens cosinusrelation"*.

Sætning (firkantens cosinusrelation)
Lad der være givet en vilkårlig firkant. Lad a og a' være det ene par modstående sider og lad b og b' være det andet par modstående sider. Lad c og c' være diagonalerne og lad α og α' være et par modstående vinkler. Der gælder så:

$$(cc')^2 = (aa')^2 + (bb')^2 - 2(aa')(bb')\cos(\alpha + \alpha')$$

Bevis
Det bevis, der her anføres, er et meget smukt eksempel på anvendelse af komplekse tal i geometri. For at beviset ikke skal virke alt for tricket angives flg. tankegang: Det er naturligt at indlægge firkanten i den komplekse plan på en sådan måde at en af vinkelspidserne ligger i begyndelsespunktet O og en af siderne følger 1.–aksen.



Punkterne O, A, B, C er nu komplekse tal, B er den ene diagonal og $A - C$ den anden. A og $B - C$ er modstående sider og det er C og $B - A$ også. Når vi ser på selve sætningen er flg. regninger (måske!) nærliggende:

$$\begin{aligned} B(A-C) &= AB - BC \\ &= A(B - C + C) - BC \\ &= A(B-C) + AC - BC \\ &= A(B-C) + C(A-B) \\ &= A(B-C) - C(B-A) \end{aligned}$$

Vi har altså flg. identitet:

$$B(A-C) = A(B-C) - C(B-A)$$

Ved brug af dette og flg. almindelige sætning om komplekse tal (en direkte følge af cosinusrelationen):

$$|x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|\cos(\arg(x\overline{y}))$$

får vi

$$\begin{aligned} |B(A-C)|^2 = {} & |A(B-C)|^2 + |C(B-A)|^2 \\ & -2|A(B-C)||C(B-A)|\cos(\arg(A(B-C)\overline{C(B-A)})) \end{aligned}$$

Vi sæter $\arg(A) = \alpha$, $\arg(B - C) = \delta$, $\arg(C) = 0$, $\arg(\overline{C}) = 0$, $\arg(B - A) = \delta - \alpha'$, $\arg(\overline{B-A}) = \alpha' - \delta$. Vi har så

$$\arg(A(B-C)\overline{C(B-A)}) = \alpha + \delta + 0 + \alpha' - \delta = \alpha + \alpha'$$

Da vi også har

$$|B| = c,\ |A - C| = c',\ |A| = b,\ |B - C| = b',\ |C| = a,\ |B - A| = a'$$

ender vi med at få:

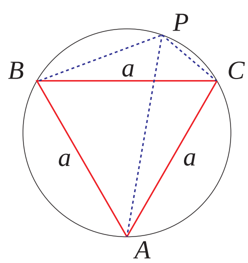
$$(cc')^2 = (aa')^2 + (bb')^2 - 2(aa')(bb')\cos(\alpha + \alpha') \qquad \text{qed}$$

Generaliseringer til en række velkendte resultater

- 1. Pythagoras. Brug sætningen på et rektangel.
- 2. Cosinusrelationen. Vi har trekanten ABC. Lad D være centrum for trekantens omskrevne cirkel. Vi har nu firkanten $ABDC$ (den er konkav). Bruges sætningen på denne firkant, samt anvendelse af teorien for periferivinkler, fås cosinusrelationen.
- 3. Ptolomæus sætning. I en indskrivelig firkant er diagonalernes produkt lig med summen af de modstående siders produkter.

Bevis: Ved brug af teorien for periferivinkler ses let at summen af et par modstående sider er 180°. Da cosinus så er –1 giver "firkantens cosinusrelation" $(cc')^2 = (aa')^2 + (bb')^2 + 2(aa')(bb')$. Dette giver $cc' = aa' + bb'$, *qed*.

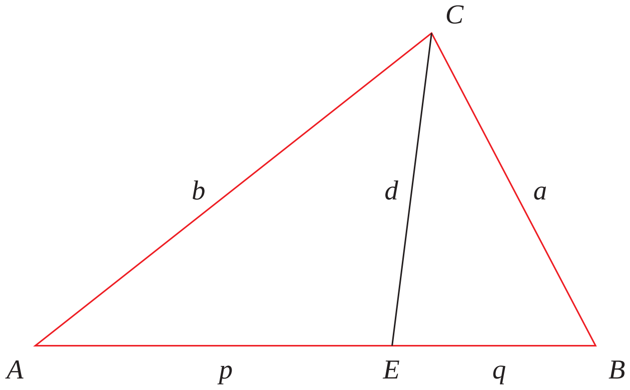
- 4. Van Schootens sætning. Lad trekanten ABC være ligesidet, og lad P være et punkt på den omskrevne cirkel beliggende på buestykket mellem B og C. Der gælder $|PA| = |PB| + |PC|$.



Matematik

Bevis: Lad a være siden i den ligesidede trekant. Ptolomæus giver nu $a|PA| = a|PB| + a|PC|$. Division med a giver det ønskede, qed.

- 5. Matthew Stewarts sætning. Betragt trekanten ABC og lad punktet E ligge på siden AB. Lad $p = |AE|$, $q = |BE|$ og $d = |CE|$. Der gælder så $d^2 = (pa^2 + qb^2)/c - pq$



Bevis: Trekanten ACB betragtes som den udartede firkant $ACBE$. Her er vinklerne C og E modstående, siderne p og a er modstående, og siderne q og b er modstående. Da $E = 180°$ og $\cos(C + 180°) = -\cos(C)$ giver firkantens cosinusrelation

$$(dc)^2 = (pa)^2 + (qb)^2 + 2paqb\cos(C)$$

Vi burger nu den sædvanlige cosinusrelation til beregning af $\cos(C)$ og indsætter dette. Efter forkortning har vi

$$(dc)^2 = (pa)^2 + (qb)^2 + pq(a^2 + b^2 - c^2)$$
$$d^2c^2 = p^2a^2 + q^2b^2 + pqa^2 + pqb^2 - pqc^2$$
$$d^2c^2 = pa^2(p + q) + qb^2(p + q) - pqc^2$$

Da $p + q = c$ fås efter division med c^2

$$d^2 = (pa^2 + qb^2/c - pq \qquad \text{qed}$$

- 6. Længden af en median. I en vilkårlig trekant er længden af medianen fra C givet ved $(mc)^2 = a^2/2 + b^2/2 - c^2/4$.

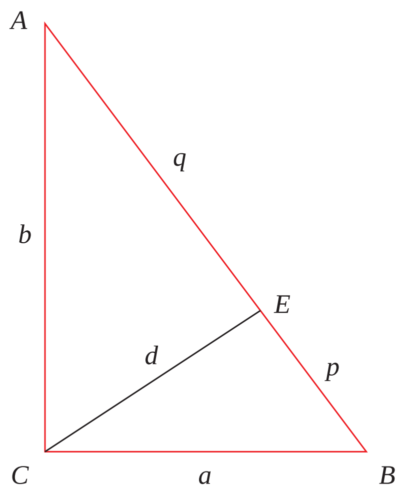
Bevis: Brug Matthew Stewart med $p = q = c/2$, qed.

- 7. Længden af en vinkelhalveringslinie. I trekanten ABC er længden af vinkelhalveringslinien fra C givet ved $(vc)^2 = ab(1 - c^2/(a + b)^2)$.

Bevis: En vinkelhalveringslinie deler den modstående side i samme forhold som de indesluttende sider (kan vises ved brug af sinusrelationen). Med de indførte betegnelser giver dette $p/q = b/a$. Da $p + q = c$ kan vi løse med hensyn til p og q. Dette giver $p = bc/(a + b)$ og $q = ac/(a + b)$. Dette indsættes i Stewarts sætning. Efter nogen regning fås det ønskede, qed.

- 8. Den retvinklede firkant. Lad os sige, at en firkant er retvinklet, hvis summen af et par modstående vinkler er ret. Der gælder så "firkantens Pythagoras". I en retvinklet firkant er kvadratet på diagonalernes produkt lig med summen af kvadraterne på de modstående siders produkter.

Bevis: Det følger direkte af firkantens cosinusrelation, da $\cos(90°) = 0$. I lighed med trekanter har vi altså også for firkanter, at cosinusrelationen er en udvidelse af Pythagoras' sætning. Det er da forunderligt!



En retvinklet trekant kan betragtes som en udartet retvinklet firkant (det fjerde punkt E vælges på hypotenusen). Der gælder umiddelbart $(dc)^2 = (pb)^2 + (aq)^2$.

Henvisninger og kommentarer

1. Jeg har sætningen fra *Nordisk Matematisk Tidsskrift*, hefte 4, 1968. Her oplyses, at sætningen blev fundet af den danske matematiker Fabricius–Bjerre i 1926. Jeg har forenklet beviset på en række områder (i artiklen bruges fx den komplekse eksponentialfunktion) – universitetsmatematikere gør til tider elementær matematik unødvendig kompliceret!

2. Ptolomæus' sætning er angivet og bevist i bogen *Algebra og geometri* af Jens Carstensen.

3. Van Schootens sætning er omtalt og bevist i en artikel i *Nordisk matematisk tidsskrift*, nr. 3, årgang 2009. Den er også nævnt, uden bevis og navn, i *Mat B for HF* af Carstensen, m.fl.

4. Matthew Stewarts sætning er omtalt og bevist i LMFK–bladet, nov. 2013, juni 2014, maj 2014.