En generalisering af fibonaccifølgen og Binets formel

Søren Høgh, lektor emeritus

Fibonaccifølgen, Binets formel og det gyldne snit

Fibonaccifølgen er et populært emne i den gymnasiale matematikundervisning. I den klassiske fibonaccifølge fås et vilkårligt led ved at lægge de to foregående led sammen.

I denne artikel vil vi betragte en følge, hvor et vilkårligt led fås som en linearkombination af de to foregående led. Vi udleder en formel for det n'te led som funktion af n. Som et specialtilfælde får vi så Binets formel. Denne vises sædvanligvis ved brug af induktion, men her angives en metode så vi kan beregne det n'te led som funktion af n – både i den generaliserede fibonaccifølge og i den sædvanlige fibonaccifølge – altså en generalisering af Binets formel. Desuden får vi en generalisering af det gyldne snit som grænseværdien for kvotientfølgen.

Lad mig først forklare ideen. Lad a_0, a_1, a_2, … være en følge af positive tal. Vi definerer funktionen $S(x)$ ved forskriften

$$S(x) = \sum_0^\infty a_n \cdot x^n$$

Ved ledvis differentiation har vi

$$S^{(n)}(0) = a^n \cdot n!$$

Dette giver $a_n = \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}$, $n = 0, 1, 2 \ldots$

Vi bestemmer først en regneforskrift for $S(x)$ og ved brug af denne bestemmer vi $S^{(n)}(0)$. Vi kan så bestemme a_n, altså det n'te led i den oprindelige talfølge. Dette er planen. Lad os komme i gang.

Vi definerer talfølgen ved rekursion. Lad a_0 og a_1 være givne positive tal og lad α og β være givne positive tal. Den generaliserede fibonaccifølge defineres ved:

$$a_0 = a_0$$
$$a_1 = a_1$$
$$a_n = \alpha \cdot a_{n-2} + \beta \cdot a_{n-1},\ n = 2, 3, 4 \ldots$$

Sættes $a_0 = a_1 = 1$ og $\alpha = \beta = 1$, har vi den klassiske fibonaccifølge: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 11, ...

Vi bestemmer nu funktionen

$$S(x) = \sum_0^\infty a_n \cdot x^n$$

Ideen er at få $S(x)$ til at være løsning til en ligning.

$$S(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \sum_2^\infty a_n \cdot x^n$$

$$S(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \sum_2^\infty (\alpha \cdot a_{n-2} + \beta \cdot a_{n-1}) \cdot x^n$$

Vi deler summen i to og flytter $\alpha \cdot x^2$ uden for i den første sum og $\beta \cdot x$ i den anden sum

$$S(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \alpha \cdot x^2 \cdot \sum_2^\infty a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \beta \cdot x \cdot \sum_2^\infty a_{n-1} \cdot x^{n-1}$$

Det første summationstegn er $S(x)$, det andet er $S(x) - a_0$, så vi har

$$S(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \alpha \cdot x^2 \cdot S(x) + \beta \cdot x \cdot (S(x) - a_0)$$

Dette er en ligning med $S(x)$ som ubekendt. Vi løser ligningen og får

$$S(x) = \frac{(a_0 \cdot \beta - a_1) \cdot x - a_0}{\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x - 1}$$

Første del af planen er nu udført. Det næste punkt i planen er at bestemme $S^{(n)}(0)$ ved brug af forskriften for $S(x)$. Vi får brug for følgende lemmaer:

Lemma 1

Lad a og b være givne tal, og lad r og s være givne tal. Da findes tal A og B så

$$\frac{a \cdot x + b}{(x-r)\cdot(x-s)} = \frac{A}{x-r} + \frac{B}{x-s} \quad \text{for alle } x \neq r, s$$

hvor A og B er givet ved

$$A = \frac{a \cdot r + b}{r - s} \quad \text{og} \quad B = \frac{a \cdot s + b}{s - r}$$

Bevis

Vi ganger på begge sider med $(x-r)(x-s)$ og får så $a \cdot x + b = A \cdot (x - s) + B \cdot (x - r)$. Vi indsætter $x = r$ og isolerer A, og derefter $x = s$ og isolerer B. Dernæst eftervises formlen, QED.

Lemma 2

Lad funktionen f være givet ved

$$f(x) = \frac{1}{x - r}$$

Der gælder så

$$f^{(n)}(0) = \frac{-n!}{r^{n+1}}$$

Bevis

Fås umiddelbart ved successiv differentiation, QED.

I udtrykket for $S(x)$ faktoriseres nævneren og lemma 1 benyttes:

$$S(x) = \frac{1}{\alpha} \cdot \left(\frac{A}{x - P} + \frac{B}{x - Q} \right)$$

Her er P den positive rod i polynomiet $p(x) = \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x - 1$ og Q den negative rod, givet ved

Matematik

$$P = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 + 4 \cdot \alpha}}{2 \cdot \alpha} \quad \text{og} \quad Q = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 + 4 \cdot \alpha}}{2 \cdot \alpha}$$

A og B er bestemt ved

$$A = \frac{(a_0 \cdot \beta - a_1) \cdot P - a_0}{P - Q} \quad \text{og} \quad B = \frac{(a_0 \cdot \beta - a_1) \cdot Q - a_0}{Q - P}$$

Nu bruges lemma 2:

$$S^{(n)}(0) = \frac{-n!}{\alpha}\left(\frac{A}{P^{n+1}} + \frac{B}{Q^{n+1}}\right)$$

Ved at sætte på fællesbrøkstreg og udnytte, at $P \cdot Q = -1/\alpha$ fås

$$S^{(n)}(0) = \frac{-n!}{\alpha}\left(A \cdot (-\alpha \cdot Q)^{n+1} + B \cdot (-\alpha \cdot P)^{n+1}\right)$$

Vi husker, at $a_n = \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}$ og har så

$$a_n = \frac{-1}{\alpha}\left(A \cdot (-\alpha \cdot Q)^{n+1} + B \cdot (-\alpha \cdot P)^{n+1}\right)$$

Sædvanligvis betegnes fibonaccitallene med F_1, F_2, ... Vi har så

$$F_1 = a_0, \quad F_2 = a_1 \quad \text{og} \quad F_n = a_{n-1} \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$$

Generalisering af Binets formel

Lad F_1 og F_2 være givne positive tal, og lad α og β være givne positive tal. Talfølgen F_n defineres rekursivt:

$$F_n = \alpha \cdot F_{n-2} + \beta \cdot F_{n-1} \qquad n = 3, 4, 5 \ldots$$

Lad P og Q være henholdsvis den positive og den negative rod i polynomiet $p(x) = \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x - 1$. Lad A og B være tallene

$$A = \frac{(F_1 \cdot \beta - F_2) \cdot P - F_1}{P - Q} \quad \text{og} \quad B = \frac{(F_1 \cdot \beta - F_2) \cdot Q - F_1}{Q - P}$$

Der gælder så, at

$$F_n = \frac{-1}{\alpha}\left(A \cdot (-\alpha \cdot Q)^n + B \cdot (-\alpha \cdot P)^n\right)$$

En generalisering af det gyldne snit

Det gyldne snit fremkommer som grænseværdien for kvotientfølgen for fibonaccifølgen. Vi kan så indføre det generaliserede gyldne snit på samme måde ved brug af den generaliserede fibonaccifølge. Vi har ved brug af den generaliserede binetformel

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{A(-\alpha \cdot Q)^{n+1} + B(-\alpha \cdot P)^{n+1}}{A(-\alpha \cdot Q)^n + B(-\alpha \cdot P)^n}$$

Vi forkorter med $A(-\alpha \cdot Q)^n$ og har så

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = -\alpha \cdot \frac{Q + P \cdot \frac{B}{A} \cdot \left(\frac{P}{Q}\right)^n}{1 + \frac{B}{A} \cdot \left(\frac{P}{Q}\right)^n}$$

Da $|P| < |Q|$ vil $(P/Q)^n$ gå mod 0 for n gående mod uendelig, og dermed vil F_{n+1}/F_n gå mod $-\alpha \cdot Q$ for n gående mod uendelig.

Da $-\alpha \cdot Q = \dfrac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha}}{2}$, kan vi konkludere:

Det generaliserede gyldne snit

Betragt den generaliserede fibonaccifølge F_n givet ved F_1 og F_2 samt rekursionsformlen

$$F_n = \alpha \cdot F_{n-2} + \beta \cdot F_{n-1}, \quad n = 3, 4, 5, \ldots$$

Kvotientfølgen $\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ har grænseværdien $g = \dfrac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha}}{2}$.

Det er bemærkelsesværdigt, at denne grænseværdi er uafhængig af begyndelsesværdierne F_1 og F_2.

Bemærkning: Hvis man antager, at ovenstående grænseværdi eksisterer, kan den bestemmes på en langt lettere måde vha. rekursionsformlen, end den her angivne. Det er ikke helt let at vise denne eksistens – heller ikke i det klassiske tilfælde.

Eksemel 1 – De klassiske fibonaccital 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

$F_1 = F_2 = 1, \ \alpha = \beta = 1, \ F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$

$$P = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \ Q = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \ A = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \ B = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Dette giver Binets formel

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Det tilhørende gyldne snit er så det sædvanlige $\Phi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Eksempel 2 – Lucastallene 1, 3 ,4 ,7 ,18, ...

$F_1 = 1, \ F_2 = 3, \ \alpha = \beta = 1, \ F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$

Dette giver $F_n = \left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Det tilhørende gyldne snit bliver det klassiske. Lad mig give et par "pæne" eksempler:

Eksempel 3 – $F_1 = F_2 = 1, \alpha = 2, \beta = 1, F_n = 2 \cdot F_{n-2} + F_{n-1}$

Dette giver følgen 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, ...

$$F_n = \frac{1}{3} \cdot (2^n - (-1)^n)$$

Det tilhørende gyldne snit bliver tallet 2.

Eksempel 4 – $F_1 = F_2 = 1, \alpha = 4, \beta = 3, F_n = 4 \cdot F_{n-2} + 3 \cdot F_{n-1}$

Dette giver tallene 1, 1, 7, 25, 103, 409, ...

$$F_n = \frac{1}{10} \cdot (4^n - 6 \cdot (-1)^n)$$

Det tilhørende gyldne snit bliver tallet 4.

Henvisninger:

1. Jesper Frandsen, *Det gyldne snit*, Systime
2. *Nordisk Matematisk Tidsskrift*, 1989, hefte 4
3. *Nordisk Matematisk Tidsskrift*, 1991, hefte 2
4. *LMFK–bladet*, februar 2017