Gyldne snit og komplekse tal

Alf Riisom, Midtfyns Gymnasium

Tidligere i en artikel, bragt i LMFK nr. 4 2016, er undersøgt, om teorien for det gyldne snit og fibonaccitallene kan generaliseres til andre reelle startværdier end to ettaller – det kunne den. Nu undersøges det, om teorien for det gyldne snit og fibonaccitallene kan generaliseres til de komplekse tal. Det viser sig, at det kan den også.

Definition: Ved den komplekse talfølge $\{F_n\}$ forstås talfølgen, hvor det næste tal i talfølgen fås ved at lægge de 2 foregående tal sammen:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}\,, \quad n > 1\,, F_1 \text{ og } F_2 \text{ givet og ikke begge } 0$$

Definer kvotientrækken $a_n = \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$

De beregninger, der er lavet for reelle tal i artiklen, gælder jo også for komplekse tal, det er kun grænseværdibetragtningerne, der skal overvejes igen. Her er det centrale at vise, at a_n har en grænseværdi for $n \to \infty$. Det er det, der er vist neden for i sætning 2.

Det kan man vise ved at vise, at nævneren divergerer i brøken (1) sidst i sætning 2. I artiklen vises, at hvis ikke $F_2 = \dfrac{(1-\sqrt{5})}{2} F_1$,

så vil F_n få konstant fortegn for stort nok n, og dermed vil nævneren divergere.

Men de betragtninger, der er lavet for reelle tal, kan jo laves for både realdelen og imaginærdelen af de komplekse tal i ovenstående talfølge:

$$F_n = x_n + iy_n$$

Så hvis man kan vise, at enten realdelen eller imaginærdelen eller dem begge har konstant fortegn fra et bestemt led, så vil nævneren i (1) divergere. Og så holder argumentet om, at der er en grænseværdi.

Så betingelsen for at nævneren i (1) ikke divergerer er, at følgende betingelser er opfyldt:

$$x_2 = \frac{(1-\sqrt{5})}{2} x_1 \quad \text{og} \quad y_2 = \frac{(1-\sqrt{5})}{2} y_1$$

og dermed

$$F_2 = \frac{(1-\sqrt{5})}{2} F_1$$

Så sætning 1 fra artiklen kan ændres til:

Sætning 1
Hvis ikke $F_2 = \dfrac{(1-\sqrt{5})}{2} F_1$, så findes et tal M, så fortegnet for x_k eller for y_k eller dem begge ikke ændres, når $k > M$ ■

Dvs. hvis ikke $F_2 = \dfrac{(1-\sqrt{5})}{2} F_1$, så er nævneren i (1) divergent.

Men i artiklen vises, at hvis $F_2 = \dfrac{(1-\sqrt{5})}{2} F_1$, så vil $a_n = \dfrac{(1-\sqrt{5})}{2}$ gælde for alle n. Men beregningerne ændres jo ikke, fordi der er tale om komplekse tal (det skal nævnes, at der er en fejl i artiklen, idet der i hele beregningen med Binets formel skal stå u_n i stedet for u_{2n} og u_{n-1} i stedet for u_{2n-1} og de samme ændringer for F_n, men det ændrer ikke konklusionen).

Følgende sætning gælder derfor også for komplekse tal:

Sætning 2
Kvotientrækken $\{a_n\}$ er konvergent. ■

Bevis
Hvis $F_2 = \dfrac{(1-\sqrt{5})}{2} F_1$, er forholdet a_n konstant lig $\dfrac{(1-\sqrt{5})}{2}$, og rækken er konvergent. Ellers findes et M, så enten realdelen eller imaginærdelen (eller begge) af F_n har konstant fortegn for $n > M$. Udregningerne vist nedenfor er de samme, som for reelle tal.

Vi skal vise, at $a_{n+1} - a_n \to 0$ for $n \to \infty$. Betragt først:

$$F_{n+2} \cdot F_n = (F_{n+1} + F_n) \cdot F_n = (F_{n+1} + F_n) \cdot (F_{n+1} - F_{n-1}) =$$

$$F_{n+1}^2 + F_{n+1} F_n - F_{n+1} \cdot F_{n-1} \cdot F_n \cdot F_{n-1} =$$

$$F_{n+1}^2 + F_{n+1} \cdot (F_n - F_{n-1}) - F_n \cdot F_{n-1} =$$

$$F_{n+1}^2 + F_{n+1} \cdot F_{n-2} - F_n F_{n-1} =$$

$$F_{n+1}^2 + (F_n + F_{n-1}) \cdot F_{n-2} - (F_{n-1} + F_{n-2}) \cdot F_{n-1} =$$

$$F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 + F_n \cdot F_{n-2} \quad \Leftrightarrow$$

$$F_{n+1}^2 - F_{n-2} \cdot F_n = F_{n-1}^2 - F_n \cdot F_{n-2}$$

Betragt så

$$a_{n+1} - a_n = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} - \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_{n+2} \cdot F_n - F_{n+1}^2}{F_{n+1} \cdot F_n} \qquad (1)$$

Af det foregående ses det, at tælleren ikke ændrer sig, når n springer med 2. Argumentet gælder selvfølgelig både for lige og ulige værdier. Så tælleren kan kun skifte mellem to faste værdier.

Da nævneren numerisk går mod uendelig for $n \to \infty$, går $a_{n+1} - a_n$ mod nul og a_n er konvergent. ■

Det bemærkes, at for $F_2 = \frac{\left(1-\sqrt{5}\right)}{2} F_1$, vil tælleren i den sidste brøk konstant være nul, mens nævneren går mod nul.

Ligeledes vil sætning 3 fra artiklen gælde, da udregningerne vil være de samme som for reelle tal:

Sætning 3
Hvis ikke $F_2 = \frac{\left(1-\sqrt{5}\right)}{2} F_1$, så er grænseværdien a^* for a_n, når $n \to \infty$, rod i polynomiet $P(z) = z^2 - z - 1$.

Bevis
Betragt $a_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + a_{n-1}^{-1}$. Lad $n \to \infty$. Så har a_{n-1} jo samme grænseværdi som a_n, og man får

$$a^* = 1 + a^{*-1}$$

Gang med a^* og isoler:

$$a^{*2} - a^* - 1 = 0.$$

Og da x_n og x_{n+1} eller y_n og y_{n+1} eller dem begge har ens fortegn for store n, må det være den positive rod $\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}$.

Det bemærkes at hvis $F_2 = \frac{\left(1-\sqrt{5}\right)}{2} F_1$, så er a_n selvfølgelig også rod i polynomiet, nemlig den negative rod $\frac{\left(1-\sqrt{5}\right)}{2}$.