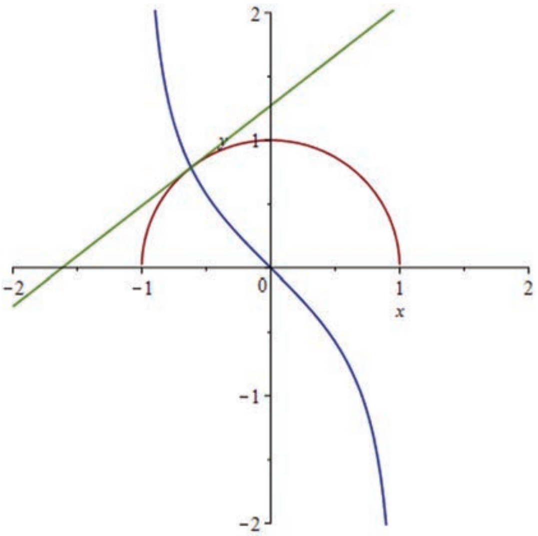
Gyldne punkter på enhedscirklen

Emil Aagaard Clausen, 2d, Køge Gymnasium

Baggrund

Baggrunden for mine undersøgelser er en sammenhæng mellem differentialregning, enhedscirklen og Det Gyldne Forhold, jeg ved et tilfælde faldt over.

Hvis man laver grafer for funktionen for den positive del af enhedscirklen, samt den afledte funktion af denne funktion, ser man, at de to grafer (ikke overraskende) skærer hinanden. Finder man tangenten til cirklen i dette punkt, vil man se, at tangenten skærer *x*–aksen i minus Det Gyldne Forhold, hvor Det Gyldne Forhold, også kaldet Φ (phi) = 1,618…



Mange værdier for dette punkt og for tangenten har noget at gøre med Φ, hvilket giver en grund til at undersøge det nærmere og finde ud af, hvorfor dette er tilfældet.

Gyldne punkter

Vi vil gerne vide, hvilken *x*–værdi der tilfredsstiller følgende ligning, hvor *y*–værdien af et punkt på enhedscirklen er lig med hældningen af tangenten, der skærer punktet:

$$\sqrt{1-x^2} = \left(\sqrt{1-x^2}\right)'$$

Vi differentierer enhedscirklen:

$$\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Vi indsætter dette i vores ligning:

$$\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2}$$

$$-x = 1-x^2$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Vi finder løsningen til andengradsligningen:

$$x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Vi bruger resultatet inden for intervallet]-1; 1[, dvs.

$$x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,61800$$

Denne *x*–værdi opfylder ligningen:

$$-\frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}} = \sqrt{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}$$

Dette er punktet på enhedscirklen:

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \sqrt{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}\right)$$

Vi omskriver *y*–værdien:

$$\sqrt{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{6-2\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{1-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

Punktet er derfor

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right) = \left(-\frac{1}{\Phi}, \frac{1}{\sqrt{\Phi}}\right)$$

hvor $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Dette kriterium bliver opfyldt af to punkter på enhedscirklen – det kan også udtrykkes i radianer med ligningen

$$\sin(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Disse to punkter er:

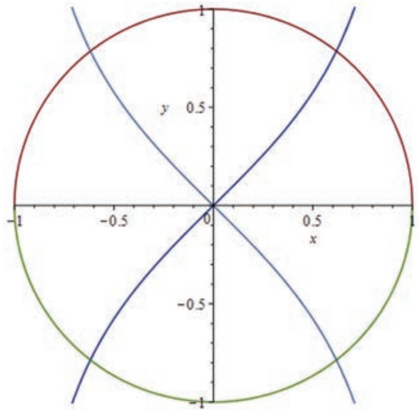
$$\left(-\frac{1}{\Phi}, \frac{1}{\sqrt{\Phi}}\right) \quad \text{og} \quad \left(-\frac{1}{\Phi}, -\frac{1}{\sqrt{\Phi}}\right)$$

Hvis vi ser bort fra positiv/negativ–fejl, findes der to punkter mere:

$$\left(\frac{1}{\Phi}, \frac{1}{\sqrt{\Phi}}\right) \quad \text{og} \quad \left(\frac{1}{\Phi}, -\frac{1}{\sqrt{\Phi}}\right)$$

Vi kan visualisere disse punkter ved at se, hvor enhedscirklen skærer den differentierede enhedscirkel:

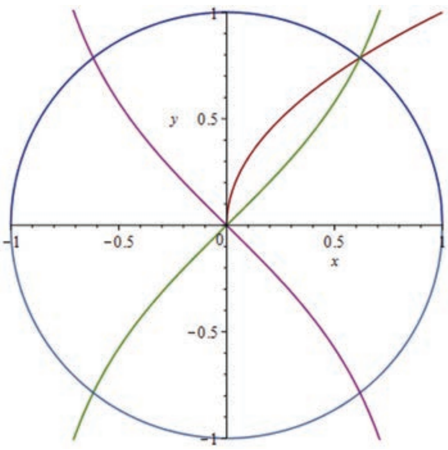
Matematik



For disse fire punkter gælder derfor følgende: Den numeriske hældning af tangenten i punktet på enhedscirklen er lig med punktets numeriske *y*–værdi:

$$\sqrt{1-x^2} = \left| \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right| \quad \Leftrightarrow \quad |y| = \left| \frac{x}{y} \right|$$

Hvis vi isolerer $|y|$ i det sidste udsagn, får vi, at $y=\sqrt{x}$. Derfor skærer funktionen $y = f(x) = \sqrt{x}$ enhedscirklen i et af de fire punkter (selvfølgelig punktet i første kvadrant).



Tangenter i de gyldne punkter

Nu kigger vi nærmere på tangenten til enhedscirklen i punktet

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \right)$$

De punkter hvor en tangent til en enhedscirkel skærer *x*– og *y*–aksen er henholdsvis

$$\left(\frac{1}{\cos(x)}, 0 \right) \quad \text{og} \quad \left(0, \frac{1}{\sin(x)} \right)$$

Tangenten skærer derfor akserne i følgende punkter:

$$\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0 \right) \quad \text{og} \quad \left(0, \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \right)$$

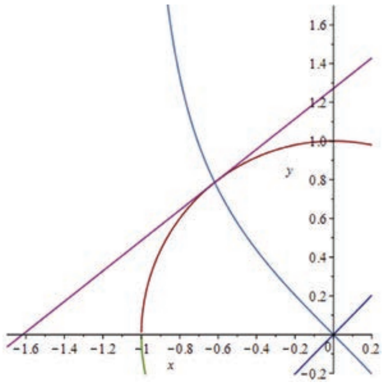
hvilket forklarer, hvorfor tangenten skærer aksen i minus Det Gyldne Forhold.

Vi vil nu danne en retvinklet trekant, hvor tangenten er hypotenusen, og hvor kateterne er *x*– og *y*–aksen. Længden af kateterne er derfor Φ og $\sqrt{\Phi}$. Tallet Φ har mange forskellige matematiske egenskaber, som er unikke for dette tal (sammen med $-1/\Phi$). En af disse egenskaber er:

$$\Phi + \Phi^2 = \Phi^3$$

Vi kan derfor ud fra Pythagoras læresætning konkludere, at hypotenusen i vores retvinklede trekant har længden $\Phi^{1,5}$. Dette bringer os frem til vores trekant:

$$(\Phi^1)^2 + (\Phi^{0,5})^2 = (\Phi^{1,5})^2$$



Nu ser vi på en Kepler-trekant, der minder lidt om vores trekant.

$$(\Phi^{0,5})^2 + (\Phi^0)^2 = (\Phi^1)^2$$

Vi ser, at potensen hos den mindste katete i begge tilfælde bliver adderet med 0,5 for at give potensen til den største katete. Vi kan også se, at potensen hos hypotenusen, er potensen hos den mindste katete adderet med 1. Vores hypotese er derfor følgende:

$$\Phi^{x\cdot 2} + \Phi^{(x+\frac{1}{2})\cdot 2} = \Phi^{(x+1)\cdot 2} \quad \Leftrightarrow$$
$$\Phi^{x\cdot 2} + \Phi^{2x+1} = \Phi^{2x+2}$$

Vi vil nu bevise denne hypotese. Det første vi kan indse er, at vi kan udelukke fordoblingen af variablen.

$$\Phi^x + \Phi^{x+1} = \Phi^{x+2}$$

Vi kan bevise, at det kun er rødderne i polynomiet $x^2 - x - 1$ (og 0), der opfylder følgende ligning:

$$a^x + a^{x+1} = a^{x+2}$$
$$a^x + a^x \cdot a = a^x \cdot a^2$$
$$(1+a)a^x = a^x \cdot a^2$$
$$1 + a = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi \quad \vee \quad a = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\Phi}$$

Vi har hermed bevist hypotesen. Trekanten dannet af tangenten er altså ligedannet med en Kepler–trekant, og det kan lade sig gøre at danne andre ligedannede trekanter med sætningen

$$\left(\Phi^x\right)^2 + \left(\Phi^{x+\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(\Phi^{x+1}\right)^2$$