# Begreb om funktioner

Klaus Bruun Pedersen & Anders Torp

## 1 Indledning

I dette kapitel vil vi beskrive en proces, hvorigennem vi har afdækket en række elevers funktionsforståelse, og vi vil give eksempler på interessante tilfælde. Specielt vil vi fokusere på en bestemt fejlopfattelse og vise, at denne fejlopfattelse faktisk er almindelig udbredt i gymnasiet.

Funktionsforståelse er en central brik i matematikfaget i gymnasiet. Det er grundlaget for meget anden matematik, og det kan derfor have vidtrækkende konsekvenser, når elever har mangelfuld eller fejlagtig begrebsforståelse inden for dette emne. Eksempelvis er det svært at forstå differentialregning, hvis man ikke har ordentligt begreb om funktioner.

Når elever stifter bekendtskab med et nyt begreb i matematikundervisningen, skal begrebet indarbejdes i en forståelsessammenhæng, hvor det sættes i relation til allerede eksisterende begreber. Begreber i matematik adskiller sig fra mange af de øvrige begreber, vi anvender i vores hverdag, ved at være meget mere præcist og entydigt defineret. Derfor kan man også i højere grad sige, at en given opfattelse er rigtig eller forkert. Desuden bygger de matematiske begreber på hinanden. Af disse grunde kan et misforstået begreb vise sig skadeligt for senere indførte begreber.

Den kognitive struktur som en elev opbygger omkring et begreb kalder Tall og Vinner (1981) for et *begrebsbillede*. Et begrebsbillede består af de mentale processer, billeder og regler, der for eleven er indbegrebet af et givent begreb. Elevens begrebsbillede står over for *begrebsdefinitionen*, som er den formelle definition, som findes i matematikbøgerne. Et divergerende begrebsbillede er således en fejlagtig opfattelse af et givent begreb. Hvis en elev præsenteres for en problemstilling, hvor et fejlagtigt begrebsbillede bliver selvimodsigende eller kommer i konflikt med et andet af elevens eksisterende begrebsbilleder, kan dette give an-


*Artiklen om Begreber og funktioner er et særtryk af kapitel 3 i den viste udgivelse.*

ledning til en *kognitiv konflikt*. En kognitiv konflikt kan ifølge Tall og Vinner være mere eller mindre bevidst. Den ubevidste kognitive konflikt bevirker, at eleven bliver usikker og fornemmer, at noget er galt. Den bevidste kognitive konflikt forudsætter, at eleven konfronteres med uoverensstemmelsen, og denne proces kan føre til en positiv udvikling i elevens begrebsbillede.

Der er forskellige måder at arbejde med emnet funktioner på. Man kan somme tider betragte en funktion algebraisk og udregne funktionsværdier ud fra forskriften (hvis der altså foreligger en). Man kan arbejde med tabeller, hvor værdier fra to variable holdes op mod hinanden. Endelig kan man arbejde grafisk med funktioner i et koordinatsystem. Disse aspekter af det samme begreb kalder Thompson og Sfard (1994) for *repræsentationsformer*. Elevers begrebsbilleder er ofte præget af de repræsentationsformer, de har arbejdet med inden for emnet. Således kan nogle elever være i stand til at løse komplekse uligheder, men ikke være i stand til at tolke dette grafisk (Thompson & Sfard, 1994).

En elev med et divergerende begrebsbillede kan være i stand til at løse mange opgaver rigtigt, selv om han har en skæv tankegang. Derfor kan det ofte være svært for læreren at se, at eleven har et problematisk begrebsbillede. Elever, der ikke formår at opbygge ordentlige begrebsbilleder, får det hurtigt svært. Matematikfaget fremstår givetvis usammenhængende og uden en logisk struktur. For disse elever kan en løsning på dette kaos være at anlægge en alternativ tilgang til forståelsen. Den *forståelse*, der ligger i at kunne løse opgaver og svare på konkrete spørgsmål uden at indse gyldigheden af den anvendte metode, kalder Skemp (1976) for *instrumentel forståelse*. Denne forståelse bygger på regler uden ræson og skal ses som en alternativ strategi til den *relationelle forståelse* (Skemp, 1976).

Matematikrelaterede ”beliefs” – eller matematikforestillinger – er en elevs personlige opfattelse af og forestillinger om, hvad der er sandt i forhold til faget matematik, matematikundervisningen og eleven selv som udøvende matematiker (Op’Eynde et al., 2002). Beliefs kan være meget styrende for en elevs tilgang til undervisningen.

## 2 Eleverne og indsatser

Eleverne var 3. års A–niveau–elever. Vi havde udvalgt nogle elever, der var fagligt udfordrede, men samtidig udviste en vilje til at ville forstå stoffet. Dette var vigtigt for os, da vi ikke var interesserede i motivationsrelaterede udfordringer. Eleverne viste sig at have meget omfattende problemer med forståelsen af emnet funktioner, men samtidig var de meget gode til at åbne sig og lade os få indsigt i deres verden af skæve begrebsbilleder. Der åbenbarede sig således en jungle af interessante begrebsbilleder, hvoraf vi senere har genfundet nogle hos andre elever også. Problemerne med elevernes begrebsbilleder og disses indbyrdes relationer viste sig så afgrundsdybe, at man let kunne få den idé, at *tabula rasa* ville være et bedre udgangspunkt end elevernes.

For at blive i stand til at kortlægge og udvikle elevernes begrebsbilleder inden for emnet funktioner udviklede vi et særligt koncept: *Frokostsessioner*.

I oktober og november 2012 afholdt vi 15 frokostsessioner. En frokostsession varede ca. 35 minutter og lå, som navnet antyder, i skolens frokostpause. Den bestod af en lærer og 2 udvalgte elever. Samtaleemnet, der varierede fra gang til gang, var snævert fokuseret på et delemne under emnet *funktioner*. Frokostsessionerne blev afholdt i en uformel tone i et klasseværelse ved et whiteboard. De blev altid indledt med en frokostsandwich, betalt af skolen. En frokostsession foregik som en lærerstyret dialog, hvor spørgsmål og små opgaver naturligt indgik. Trods den uformelle tone var frokostsessionerne arbejdsintensive, og delemnet blev drøftet indgående. Tidspunktet var valgt til at være i frokostpausen af flere grunde. Eleverne (og lærerne) er ikke så trætte, som man typisk er senere på dagen, og desuden tjener det faktum, at frokostpausen er en indeklemt tidslomme, til at gøre frokostsessionerne mere intensive på grund af den naturlige deadline.

Rammerne fra frokostsessionerne viste sig gunstige til at udforske og kortlægge elevernes begrebsbilleder. Gennem de måneder, vi afholdte frokostsessioner, opnåede vi en dyb indsigt i elevernes begrebsbilleder og deres matematikrelaterede beliefs. Dette var på en gang en indsigtsfuld og skræmmende oplevelse, fordi elevernes begrebsbilleder såvel som deres matematikrelaterede beliefs viste sig på flere punkter at være meget skæve og usammenhængende.

Frokostsessionerne blev optaget på video, så vi efterfølgende kunne gennemse og analysere dialogerne. I næste afsnit vil vi give eksempler på interessante tilfælde. Specielt vil vi gå i dybden med et bestemt begrebsbillede.

## 3 Amalie–fortolkningen

En af de interessante opdagelser, vi gjorde under frokostsessionerne, var af et helt konkret begrebsbillede, omhandlende lineære funktioner.

Vi observerede en konsistent fejlopfattelse af betydningen af variable og konstanter i den algebraiske repræsentation af en lineær funktion $y = ax + b$. I denne opfattelse er $y$ og $b$ forbundet og $a$ og $x$ er forbundet, således at $a$ og $b$ angiver værdien af henholdsvis $x$ og $y$. Vi har navngivet det Amalie–fortolkningen efter dæknavnet på en pige, der deltog i frokostsessionerne og fremviste dette begrebsbillede. På figur1 ses et udklip af Amalies besvarelse af en test om funktionsforståelse.

Amalie–fortolkningen fremgår meget klart af besvarelsen på figur 1. I denne tolkning af $a$, $b$, $x$ og $y$ opfattes det, som om koefficienten til $x$ angiver værdien af $x$ og at $b$ angiver $y$. I figur 2 ses Amalies besvarelse af en opgave med et konkret eksempel på en lineær funktion. I eksemplet er $a = 1$ og $b = 5$. I overensstemmelse med tolkningen fra figur 1 angiver hun at $y = 5$, men hævder, at $x$ stadig er ubekendt. Dette hænger sammen med, at 1–tallet foran $x$ ikke skrives, og at det derfor opfattes, som om der ikke er noget $a$ og derved ikke er nogen information om værdien af $x$ (se figur 2).

Dette bekræftes af Amalies svar på næste opgave (se figur 3). I denne opgave er $a$ lig med 2, og $b$ er stadig lig med 5. Amalie hævder nu, at opgaven adskiller sig fra den forrige derved, at $x$ har fået en værdi, og at den derved ikke længere er ubekendt.

Dette begrebsbillede ligger selvsagt meget langt fra begrebsdefinitionen, og selv banale spørgsmål må give anledning til kognitive konflikter hos Amalie. Hvordan skal hun eksempelvis forstå spørgsmålet: "Angiv $y$ når $x$ er lig med 3" eller "Tegn grafen for funktionen i et koordinatsystem"?

I figur 4 forholder Amalie sig til at skulle tegne grafen til funktionen $y = x + 5$ i et koordinatsystem. Hun tolker opgaven i overenstemmelse med de tidligere opgaver. Variablene $x$ og $y$ opfattes som tal, der enten er kendte eller ubekendte. Således tegner hun grafen for $y = x + 5$ som et punkt (1, 5).

Nu ses på den generelle lineære ligning y = a x+b

Forklar hvad y er :
y er b

Forklar hvad x er :
x er a

Forklar hvad a er :
a fortæller noget om x

Forklar hvad b er:
b viser hvad y er

*Figur 1. Udklip fra Amalies besvarelse af en test om funktionsforståelse.*

Se på funktionen y=x+5

Beskriv hvad denne ligning siger om sammenhænget mellem y og x.
x er et tal som vi ikke kender og y=5

*Figur 2. Udklip fra Amalies besvarelse af en test om funktionsforståelse.*

Forklar hvordan y = 2x +5 er forskellig fra y= x+5
x har fået en værdi

*Figur 3. Udklip fra Amalies besvarelse af en test om funktionsforståelse.*

Matematik

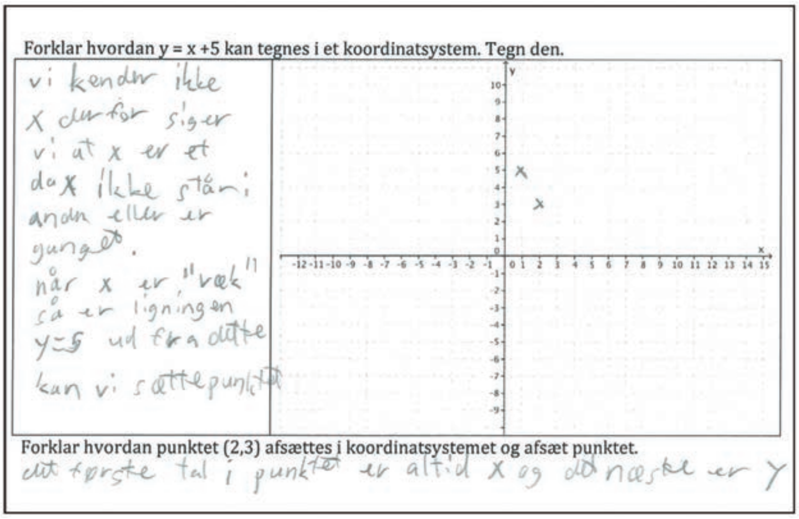
Repræsentationsformerne er usammenhængende. Amalie–fortolkningen tager udgangspunkt i den algebraiske repræsentationsform. Den opfattelse, at $a$ og $b$ angiver $x$ og $y$, umuliggør at se på en funktion som en sammenhæng mellem variable. Samtidig gør den, at grafen for den rette linje reduceres til et punkt. Senere vil vi dog vise, at nogle elever godt kan tegne korrekte grafer ved at oplysningerne $a$ og $b$ koder for, hvordan man skal gøre: som i en kogebogsopskrift fortæller $b$, hvor man skal starte (på $y$–aksen), og $a$ fortæller, om man skal tegne stregen opad eller nedad (se figur 8 og 9). Denne instrumentelle tilgang kan givetvis løse nogle opgaver.

Senere har vi observeret samme begrebsbillede hos andre af vores udvalgte elever. Vi besluttede derfor at skabe et kvantitativt billede af Amalie–fortolkningens udbredelse. Denne undersøgelse vil vi beskrive i næste afsnit.

## 3.1 Udbredelse

For at teste udbredelsen af Amalie–fortolkningen og andre af de fejlopfattelser, vi fandt under vores interview i forbindelse med frokostsessionerne, lavede vi en screeningstest med en række spørgsmål, der specifikt skulle screene for disse fejlopfattelser. I første omgang indgik 417 1. g–elever fra Ørestad Gymnasium i screeningstesten. Testen var digital og bestod af 42 spørgsmål, hvoraf størstedelen var multiple choice–spørgsmål. Testen blev besvaret i starten af året (inden gymnasiets lærerne havde haft mulighed for at præge eleverne). Den var sat til at vare i 30 minutter og foregik uden hjælpemidler. Testen kan således benyttes til at sige noget om de begrebsbilleder, eleverne møder op med i gymnasiet.

Svarmuligheden A i figur 5 er udtryk for den opfattelse, at $a$–værdien i lineære sammenhænge angiver værdien af $x$, og at $b$–værdien angiver værdien af $y$. Dette er et klart udtryk for Amalie–fortolkningen. Svarmulighed C er en afart af denne opfattelse. Forskellen er, at $y$ i denne tolkning er ubekendt. 84 elever svarer enten A eller C (4 elever svarer begge dele). Af disse 84 elever svarer 49 (58 %) også forkert på spørgsmålet i figur 6.




*Figur 4. Udklip fra Amalies besvarelse af en test om funktions forståelse.*

Betragt følgende ligning: $y = 2x + 5$

Angiv hvilke af følgende udsagn der er korrekte:

- A) y er lig med 5 og x er 2
- B) y er lig med 1 og x er 2
- C) y er ubekendt og x er lig med 2.
- D) Både x og y er ubekendte.
- E) Hvis x sættes til 1 bliver y lig med 4
- F) Hvis x sættes til 1 bliver y lig med 3
- G) Hvis x sættes til 1 bliver y lig med 6
- H) Hvis x sættes til 3 bliver y lig med 11

(Det er muligt at sætte flere kryds)
**A)** 9,1% (38 svar) . **B)** 2,9% (12 svar). **C)** 12,0% (50 svar). **D)** 44,8% (187 svar). **E)** 3,1% (13 svar). **F)** 1,4% (6 svar). **G)** 7,2% (30 svar). **H)** 50,4% (210 svar).

*Figur 5. Spørgsmål og svar fra screeningstest.*

Betragt ligningen: $y = x + 1$
Hvor meget vokser y med når x vokser med 2?

- A) y vokser ikke
- B) y vokser med 2
- C) y vokser med 0
- D) y vokser med 1
- E) ved ikke

(sæt ét kryds)
**A)** 17,7 % (74 elever). **B)** 52,0 % (217 elever). **C)** 2,4 % (10 elever). **D)** 19,2 % (80 elever). **E)** 2,1 % (9 elever).
6,5 % (27 elever) undlod at svare

*Figur 6. Spørgsmål og svar fra screeningstest.*

Svaret A er et udtryk for den opfattelse, at de variable $x$ og $y$ kan antage forskellige værdier, men at de ikke er koblede. Svaret D er det hyppigst forekommende forkerte svar. Det kan være et udtryk for den opfattelse, at $b$–værdien i forskriften for en lineær funktion angiver $y$–værdien. Der er godt nok tale om væksten af $y$, men det kan være svært at forholde sig til, hvis man ikke har begreb om variabelsammenhæng.

Af de 84 elever, der ikke har forstået rollerne af $x$ og $y$ i forhold til $a$ og $b$ i $y = ax + b$, er der ca. 40 %, der kan svare rigtigt på, hvor meget $y$ stiger, hvis $x$ stiger med 2. Det er underligt, at disse elever kan svare korrekt på et spørgsmål om variabelsammenhæng. Men måske er det netop et udtryk for instrumentel forståelse, der i denne situation redder dem. Samlet set kan vi af disse data se, at 84 elever eller over 20 % af vores 1. g'ere har et begrebsbillede, som er en afart af Amalie–fortolkningen. Det er altså en forholdsvis udbredt opfattelse blandt 1. g'ere i gymnasiet, hvis ellers Ørestad Gymnasium er repræsentativ i denne sammenhæng.

## 4 Julies verden

I dette afsnit vil vi afdække begrebsbilleder for en elev, Julie. Hun er et eksempel på, at matematiske problemer ofte stikker dybt. I forbindelse med frokostsessionerne dykkede vi dybere ned i forståelsen af vores elevers matematikopfattelser, end man har tid og mulighed for i de sporadiske dialoger, man har med sine elever i den almindelige undervisningssituation. Udtalelser, som vi måske under andre omstændigheder ville have kategoriseret som upræcise, viste sig at være udtryk for fundamentale fejlopfattelser.

Julie demonstrerede uoverensstemmelse mellem forskellige repræsentationsformer. Forevist en funktion $y = x + 5$ kan hun udregne $y = 7$, hvis $x = 2$, endvidere kan hun finde $x = –3$, hvis $y = 2$. Kort efter beskriver hun sammenhængen mellem $x$ og $y$ i selv samme funktion som: "*y* er det samme som *x*" og "*x* og *y* er lige store". Her skulle man mene, at der måtte opstå en kognitiv konflikt, men det gør der ikke. Dette indikerer, at hun har opbygget et intrinsisk (næsten) sammenhængende begrebsbillede, som kan producere disse svar uden at give anledning til en intern konflikt. Muligvis ser hun $y$ som en operation, der gør noget ved $x$. Til at begynde med, inden operationen foretages, er $x$ og $y$ det samme, idet de er lige ubekendte. Når operationen udføres, og der lægges 5 til $x$, bliver resultatet 7. Hermed får $y$ en dobbeltrolle: Den er udgangspunktet, dvs. det samme som $x$, men idet der lægges 5 til på højresiden, skal vi gøre det samme på venstresiden, hvorved $y$ bliver til 7. Denne dobbeltrolle indikeres yderligere ved, at Julie skriver: "*y* skal være det samme som *x*" og "*y* afhænger af *x*" i svar på spørgsmålene "forklar, hvad *x* er" og "forklar, hvad *y* er" i funktionen $y = ax + b$. Se figur 7.

Julie kan ikke tegne grafen for funktionen i et koordinatsystem, men skriver om konstanterne $a$ og $b$ henholdsvis, at $a$ "viser, om funktionen er aftagende eller stigende", og at $b$ "viser, hvor funktionen skærer på $y$–aksen". Se figur 8.

Dette mener hun tilsyneladende bogstaveligt. I en anden opgave skal hun angive $a$ og $b$ i funktionen $y = –x + 0{,}5$. Hun skriver: "$a = y$ er aftagende" og "$b$ = skærer i en halv". $b$ er således ikke $b = 1/2$. $b$ skal ses som den information, der angiver, hvor grafen skærer.

Hendes brug af lighedstegnet skal i denne kontekst nok opfattes som: "hvilket betyder at". Se figur 9.

På samme måde er $a$ ikke hældningen, men derimod oplysningen om, hvordan grafen vokser. For Julie er der tilsyneladende ikke nogen sammenhæng mellem den algebraiske og den grafiske repræsentationsform, "skæring på $y$–akse" og "hældning af $y$" er således koder for, hvilken streg man skal tegne i koordinatsystemet. Hendes begrebsbillede indeholder ikke information om nogen variabelsammenhæng, og de variable mister derfor deres betydning. Det er givetvis derfor, at hun i besvarelsen i figur 10 glemmer eller undlader at skrive $x$'et i forskriften $y = 1x + 2$.

Julies begrebsbilleder er relativt stærke, og det tyder ikke på, at hun er plaget af kognitive konflikter. Dette kunne også være et resultat af hendes matematikrelaterede beliefs.

Af dialogen på figur 11 fremgår det, at Julie ikke ser matematiske sætninger som noget, der er udledt logisk ud fra nogle præmisser, men som en række usammenhængende regler med en meget snæver anvendelsessfære.

Nu ses på den generelle lineære ligning y = a x+b

Forklar hvad y er :
Y skal være det samme som X

Forklar hvad x er :
Y afhænger af X

*Figur 7. Udklip fra Julies besvarelse af en test om funktionsforståelse.*

Forklar hvad a er :
viser om funktionen er aftagende eller stigende

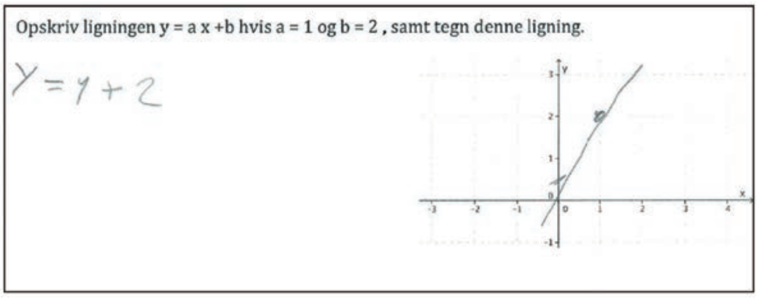
Forklar hvad b er:
viser hvor funktionen skær på y-aksen

*Figur 8. Udklip fra Julies besvarelse af en test om funktionsforståelse.*

Se på y= -x+0,5 og angiv hvad a og b er

a = x er aftagende
b = skær i en halv

*Figur 9. Udklip fra Julies besvarelse af en test om funktionsforståelse.*




*Figur 10. Udklip fra Julies besvarelse af en test om funktionsforståelse.*

| | |
|---|---|
| Julie: | Jeg har altid haft den holdning til matematik, at der er bare nogle regler, man skal følge, og sådan er det. |
| Lærer: | Er det matematiklærerne, der har fundet på reglerne? |
| Julie: | Nej, det er nogle filosoffer. Er det ikke det, de hedder? |

*Figur 11. Uddrag af dialog fra frokostsession.*

| | |
|---|---|
| Lærer: | Når jeg skriver $2a = a^2$. Er det så rigtigt? |
| Julie: | Ja, det ville jeg da mene. |
| [kort pause] | |
| Julie: | Nå nej. Det er når man differentierer. |

*Figur 12. Uddrag af dialog fra frokostsession.*

Af dialogen på figur 12 fremgår det, at Julie ikke ser på ligningen som et logisk udsagn, men som en regel, hun skal huske. Hun ihukommer antageligvis reglen $(x^2)' = 2x$ fra differentialregning og tror derfor, at det er sandt. Herefter går det op for hende, at denne regel kun gælder, når man beskæftiger sig med differentialregning. Julie ser matematik som en række adskilte discipliner, hvortil der er knyttet nogle regler. Reglerne er opfundet (af filosoffer) og kunne givetvis godt have set anderledes ud. Det er elevens opgave at huske, hvilke regler der gælder til hvert emne. Meningsløsheden i denne belief må være svær at bære.

Julie – såvel som Amalie – bestod matematik på A–niveau både skriftligt og mundtligt. Dette kan tolkes, som at en instrumentel tilgang til matematik i gymnasiet godt kan være tilstrækkelig. Det kan også tænkes, at vi gennem vores langvarige arbejde med Julie har bidraget til at opbygge en relationel forståelse hos hende. Formentlig er der tale om en kombination af de to.

## 5 Referencer

Tall, D. & Vinner, S. (1981). *Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. Educational Studies in Mathematics*, 12, s. 151–169.

Thompson, P. & W. Sfard, A. (1994). *Problems of Reification: Representations and Mathematical Objects*. I: D. Kirshner (Ed.) *Proceedings of the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* — North America, Plenary Sessions Vol. 1, s. 1–32. Baton Rouge, LA: Louisiana State University.

Skemp, R. (1976). *Relational Understanding and Instrumental Understanding. Mathematics Teaching*, 77, s. 20–26.

Op't Eynde, P., de Corte, E. & Verschaffel, L. (2002). *Framing Students' Mathematics–related Beliefs*. I: G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (red.): Beliefs: *A Hidden Variable in Mathematics Education?*, s. 13–37. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

---

Med ovenstående artikel ønsker *Foreningen af eksaminerede matematikvejledere* ved de gymnasiale uddannelser at give et indblik i, hvordan man på et grundlag af matematikdidaktisk forskning kan arbejde med elever, der udviser særlige læringsvanskeligheder i matematik. Artiklen er skrevet af to kolleger, der på det første hold gennemførte uddannelsesprogrammet til matematikvejleder ved Roskilde Universitet under ledelse af Mogens Niss og Uffe Thomas Jankvist..

Artiklen, som er et gentryk af kapitel 3 i bogen *Fra snublesten til byggesten*, Forlaget Frydenlund, viser noget af den matematikdidaktik vi benytter i vores arbejder som vejledere, men også i høj grad som undervisere. Bogen indeholder fem yderligere kapitler, skrevet af andre matematikvejledere, samt en indledning. I øvrigt er endnu en bog skrevet af matematikvejledere fra andet hold på vej. Den udkommer i foråret 2017, ligeledes på Forlaget Frydenlund. Artiklen er ikke mindst tænkt som en invitation til, at vi matematiklærere som faggruppe bliver bedre til at udveksle solidt funderede didaktiske overvejelser og tiltag, meget gerne her i bladet.

Fra foreningen vil vi gerne takke LMFK, Forlaget Frydenlund, bogens to redaktører samt kapitlets to forfattere for at gøre det muligt.

Nærmere oplysninger om *Foreningen af eksaminerede matematikvejledere* kan fås hos formanden, Morten Stoklund Larsen.

For yderligere information kan følgende links benyttes: Matematikvejleder RUC: typo3.ruc.dk/en/departments/department-of-science-and-environment-dse/efteruddannelse/matematikvejlederuddannelsen
Fra snublesten til byggesten: frydenlund.dk/boeger/varebeskrivelse/3773