Succes med matematik

Hans Jeppesen, pensioneret lektor, hans_jeppesen@hotmail.com, tlf. 61793724

Sådan får dine svage elever succes med matematik – uden opslidende kampe og nederlag

Tanker en søvnløs julenat satte gang i ny måde at undervise i matematik på, som får selv de svageste elever til intuitivt at forstå – og få succes med – deres tidligere hadefag.

Kære matematikkolleger. Hvad ville du sige, hvis jeg påstod, at mine matematikelever på C–niveau kunne løse opgaver i hovedet, som dine elever på A–niveau kun med besvær kunne løse – med hjælp fra lommeregneren? Og at du selv relativt let kunne opnå det samme resultat med dine svageste elever?

Lad os begynde med at spole tiden cirka 16 år tilbage. Juleaften år 2000 forløb forventeligt – til at begynde med. Men efter en lang og hyggelig aften med familien kunne jeg ikke falde i søvn, og som så ofte før faldt tankerne på, hvorfor matematik mon er så svært for en stor gruppe elever? Som i en slags juleåbenbaring forstod jeg med ét, at problemet i høj grad ligger i de principper, vi bruger til undervisning i regneregler og ligningsomskrivning. Jeg stod ud af sengen igen og begyndte at skrive mine tanker ned. Og i ugerne derefter finjusterede jeg mine idéer, så de kunne bruges i praksis – når jeg stod i klasserne og underviste.

I mange år har jeg undervist i matematik på C–niveau på en stor hf–skole. I en del år aftalte jeg med ledelsen og nogle kolleger, at vi delte eleverne efter matematiske forudsætninger. Der var altid fire klasser, og holdene var lige store efter opdelingen. For at få kollegerne med på idéen om at afprøve min nye *julenats–idé*, tog jeg altid det svageste hold. De var fantastiske at arbejde med, idet de ikke før havde oplevet at være fri for de (matematisk) kloge elever, som hele tiden tog opmærksomheden.

For at komme forbi deres store frustrationer og mange dårlige erfaringer i forhold til matematisk forståelse, startede jeg med at fortælle dem

a) nu begynder vi forfra med den matematiske forståelse
b) det er nærmest en fordel, hvis I ikke har styr på regnemetoderne
c) I kan ikke skjule jer bag de dygtige, for de er her ikke
d) der findes ikke dumme spørgsmål
e) I må gerne stille de samme spørgsmål mange gange
f) jeg vil undervise efter regler, som I ikke har mødt før, men naturligvis er de korrekte
g) når vi kommer til eksamen, vil jeres hold ikke være det dårligste af de fire hold

Og ja, sidste punkt endte altid med at holde stik.

Når jeg uden bekymring sagde sådan til de nye – svage – elever, hænger det sammen med, at hvis man først har fået reglerne galt i halsen eller blot ikke har fået styr på det grundlæggende, så er det omtrent umuligt senere at ændre de fejlbehæftede rutiner, fordi de er blevet til indgroede vaner.

Jeg påstod, at de lige nu ikke havde styr på de fire simple regnearter. Til det protesterede de naturligvis højlydt. Herefter stillede jeg nogle simple opgaver til efterprøvning af min påstand. Jeg havde desværre altid ret.

Sådan forklarer jeg eleverne om min nye metode

1. vi har kun tre fundamentale regnearter (kunstpause, så jeg kunne se deres ansigter)
2. de tre regnearter har hver deres omvendte regneart, dog har potensopløftning to omvendte
3. det centrale er, at vi holder styr på, hvilken regneart vi arbejder med, og om det er en omvendt
4. regnearten + (og den omvendte –) er den svageste regneart, som vi ved ligningsløsning klarer først
5. dernæst ser vi på · og /. Jeg bruger konsekvent · for gange og : eller vandret brøkstreg for dividere
6. endelig den stærkeste regneart potensopløftning, $\text{grundtal}^{\text{eksponent}} = a^b$. Her har vi to omvendte regnearter, $\sqrt[b]{a}$ og $\log_c d$. Potensopløftning er jo ikke kommutativ.

Jeg startede helt fra begyndelsen og med meget simple tal, når de skulle løse ligninger:

a) $x + 3 = 9$ der umiddelbart omskrives til $x = 9 - 3 = 6$, idet + bliver – når led flyttes over
b) $3 \cdot x = 21$ der omskrives til $x = \frac{21}{3} = 7$, her bliver gange til dividere ved overflytning
c) $x^3 = 64$ der omskrives til $x = \sqrt[3]{64} = 4$, eksponent bliver rodeksponent ved overflytning
d) $4^x = 64$ der omskrives til $x = \log_4 64 = 3$, potensens grundtal bliver logaritmens grundtal ved overflytning

"Men … sådan må man da ikke regne!"

Herefter er der naturligvis nogle som indvender, at man ikke bare omskriver på den måde. Derfor viser jeg kort, at det reelt er det samme som standardmetoden, men at min metode er langt enklere og mere logisk.

I noterne til eleverne fylder det naturligvis betydeligt mere, men for fagkollegerne på dette medium er der næppe nogen, som ikke på forhånd er helt klar over, at

a) minus bruges til at isolere led
b) dividere bruges til at isolere en faktor
c) rodtegn bruges til at isolere grundtal
d) $\log_{\text{grundtal}}(?)$ bruges til at isolere en eksponent

Selv om det er helt enkelt, er der nok en del (måske også af jer?), som ikke præciserer for eleverne, at logaritmen blot er en simpel omvendt regneart. Principielt er den lige så fundamental (og enkel) som dividere.

Når vi traditionelt ikke fremdrager det for eleverne, skyldes det sikkert en noget træg tradition, og at der før i tiden ikke var de simple knapper på lommeregneren, så vi kunne demonstrere metoden.

Hvis nogle af jer har undret jer, så er det på min foranledning, at TI–Nspire for år tilbage fik mulighed for at beregne logaritmer med vilkårlige grundtal, og at opdateringerne til TI 89 fik samme mulighed. På de matematiske lommeregnere fra Casio har knapperne længe været der, og nu er de vist også på alle Texas lommeregnere?

Keep it simple: Ny enkel tilgang løser traditionelle komplekse problemer

Det er centralt for mig og for de elever, som har svært ved den meget teoretiske (gammeldags) tilgang til regnearterne, at alt skal gøres intuitivt og logisk. Det lykkes for den største del af eleverne at forstå alle 3 regnearter på en intuitiv måde. Jeg bruger enkeltlogaritmisk papir for at demonstrere, at det forståelsesmæssigt er lige så simpelt at gange og dividere som at lægge til og trække fra!

Papiret bruges også til at vise alle potensregnereglerne, og her er jeg ikke begrænset til at vise reglerne for heltallige eksponenter. Det er lige så simpelt at vise reglerne for reelle eksponenter, og udtryk af typen $2{,}54^{\pi}$ giver fuld logisk og intuitiv mening. Reglerne er i øvrigt meget simple at vise for alle elevtyper.

Reglerne for regning med logaritmer er tilsvarende simple at bevise. Jeg husker et år, hvor jeg 15 min før ringetid var klar til at påbegynde gennemgangen af dem. Eleverne protesterede de over, at det var for kort tid, men jeg påstod, at der var rigeligt med tid. Vi var klar til frikvarter 5 min før ringetid, og alle spørgsmål var besvaret.

Selv om jeg bruger logaritmepapiret til indlæringen, er det klart, at lommeregneren bruges i hverdagen.

Noterne til eleverne er på blot 13 sider, og de inkluderer en del afsluttende dræberligninger, som de fleste reelt kan klare, når kurset er afsluttet efter ca. 15 undervisningstimer. Resten af året bruger vi de indlærte regnemetoder, og derfor slipper vi for de fleste forståelsesproblemer.

Eksempler på dræberligninger også til elever på C–niveau

Øvelse IX i udvalg (fra noterne). Nogle ekstra svære ligninger (rigtige dræberligninger)

e) $65 \cdot \sqrt[x-2]{34{,}8} = 103$ løsning: $x = 9{,}711$

h) $\dfrac{432}{6{,}2 - x^{3{,}13^{-1}}} = 318{,}38$ løsning: x = 139,46

j) $\log_{\frac{7}{3-x}}(43{,}1) = 2{,}81$ løsning: $x = 1{,}166$

l) $\log_{2{,}8}\left(\dfrac{7}{3-x}\right) = 2{,}1$ løsning: $x = 2{,}19$

Når metoden er indarbejdet, kan fx j) løses ved flg. elementære omskrivninger:

$$\log_{\frac{7}{3-x}}(43{,}1) = 2{,}81 \iff 43{,}1 = \left(\frac{7}{3-x}\right)^{2{,}81} \iff$$

$$\sqrt[2{,}81]{43{,}1} = \frac{7}{3-x} \iff 3 - x = \frac{7}{\sqrt[2{,}81]{43{,}1}} \iff$$

$$3 - \frac{7}{\sqrt[2{,}81]{43{,}1}} = x = 1{,}166$$

Først flyttes logaritmens grundtal over som potensens grundtal. I næste omskrivning flyttes eksponenten over som rodeksponent. I tredje omskrivning byttes rundt (2 steder) på gange og dividere, så det med x kommer op i tælleren. I sidste omskrivning flyttes rundt (2 steder), så x isoleres med et underforstået + foran. Til sidst bruges lommeregneren.

Hvordan vil jeres elever på A–niveau klare den uden at bruge SOLVE?

Der er en meget væsentlig gevinst ved min metode. Eleverne lærer nogle vigtige matematiske tankegange.

På en Fysiklærerdag for et par år siden beklagede dekanen på Institut for Fysik ved Aarhus Universitet sig over de studerendes store mangel på talfornemmelse; de kunne bruge SOLVE, men de forstod ikke hvad de regnede på. Det er fint med CAS, men det bør være en overbygning på de grundlæggende matematiske færdigheder og ikke en erstatning for dem.

Jeg bor i Aarhus, og min primære arbejdsplads var Aarhus Akademi. Nu er jeg på pension – men jeg tager gerne ud på skolerne for at fortælle og demonstrere mine anderledes regnemåder, mine noter er ikke hemmelige! Det vil være nødvendigt med en levende introduktion, ellers er det for let blot at afvise den anderledes tankegang. Kan du se fidusen for dine (svage) elever – og for dig selv som deres lærer? Så kontakt mig og lad os aftale nærmere – først til mølle.